

ANNALES DE L'INSTITUT FOURIER

ROBERT ROUSSARIE

Sur les feuilletages des variétés de dimension trois

Annales de l'institut Fourier, tome 21, n° 3 (1971), p. 13-82

http://www.numdam.org/item?id=AIF_1971__21_3_13_0

© Annales de l'institut Fourier, 1971, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales de l'institut Fourier » (<http://annalif.ujf-grenoble.fr/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

SUR LES FEUILLETAGES DES VARIÉTÉS DE DIMENSION TROIS

par Robert ROUSSARIE

Introduction.

Le premier problème rencontré dans l'étude des feuilletages est celui de leur existence : plus précisément, est-ce que l'existence d'un champ de plans sur une variété entraîne l'existence d'un feuilletage de même codimension ? Ainsi, G. Reeb a décrit un feuilletage de S^3 dans [12], et, plus récemment, Lickorish [6] et J. Wood [24] ont montré que toute variété compacte de dimension 3 possède des feuilletages. Plus précisément, J. Wood pose la question suivante : "Existe-t-il un champ intégrable dans chaque classe d'homotopie de champs de plans ?", et donne une réponse affirmative dans le cas des variétés de dimension 3 et de leurs feuilletages de codimension 1. D'autre part, Phillips, à l'aide de résultats sur les submersions, donne une réponse affirmative à cette question pour les champs de plans de codimension 1 des variétés ouvertes de dimension quelconque. Récemment également, R. Bott a trouvé des conditions nécessaires pour qu'un sous fibré du fibré tangent d'une variété soit équivalent au fibré défini par un champ de plans intégrable. Ces conditions s'expriment par la nullité de certaines classes de Pontryagin (dans le cas réel) ou de certaines classes de Chern (dans le cas complexe) du fibré normal au fibré donné, dans le fibré tangent à la variété. Ces conditions permettent, d'autre part, d'apporter une réponse négative aux deux questions énoncées ci-dessus.

Un second problème que l'on peut se poser est celui de la classification des feuilletages. On introduit pour cela la définition suivante : Deux feuilletages \mathcal{F} et \mathcal{F}' de même codimension q sur une variété V sont conjugués (respectivement différenciablement conjugués) s'il existe

un homéomorphisme h (respectivement un difféomorphisme) de V envoyant les feuilles de \mathcal{F} sur les feuilles de \mathcal{F}' .

Dans la recherche des classes de conjugaison, la première étape est de déterminer quelles sont les sous-variétés réalisables comme feuilles de feuilletage. Ainsi, Novikov a montré que tout feuilletage de codimension 1 de S^3 possède une feuille compacte, et il est facile de voir que toutes les feuilles compactes de S^3 sont difféomorphes à $S^1 \times S^1$; l'exemple de Reeb montre que \mathbb{R}^2 peut être réalisé comme feuille ; par tourbillonnement le long de transversales fermées, on peut réaliser \mathbb{R}^2 moins un nombre fini de points ; enfin, on trouvera plus loin des exemples de feuilletages de S^3 possédant des feuilles difféomorphes à n'importe quelle variété compacte orientable de dimension 2 moins un nombre fini de points.

Pour simplifier l'étude, on peut se restreindre à certains types de feuilletages, en se fixant par exemple le type topologique des feuilles ou des conditions sur l'holonomie, et rechercher les variétés qui possèdent de tels feuilletages et les classes de conjugaison de tels feuilletages.

C'est une telle étude qui est faite ici. Les variétés considérées sont de dimension 3, compactes, connexes, orientables. Si le bord n'est pas vide, ses composantes connexes sont supposées être des feuilles difféomorphes à T^2 , les autres feuilles étant difféomorphes à \mathbb{R}^2 . On appellera feuilletage de Reeb un tel feuilletage. Sous ces conditions très restrictives, on peut déterminer les variétés possédant de tels feuilletages. Ces variétés sont difféomorphes à $T^3 = S^1 \times S^1 \times S^1$, $D^2 \times S^1$ ou $T^2 \times [0, 1]$ (avec $T^2 = S^1 \times S^1$). Ce résultat a été obtenu dans [15] pour le cas des variétés sans bord par H. Rosenberg et J. Sondow et dans [16] pour le cas des variétés avec bord. La démonstration sera rappelée dans la partie III, où l'on trouvera également une classification des feuilletages de Reeb à conjugaison près.

On peut aussi déterminer les variétés admettant des feuilletages dont les feuilles sont difféomorphes à T^2 ou \mathbb{R}^2 : ce sont les variétés précédentes et celles que l'on obtient à partir d'elles par identification sur le bord [16].

Un autre type particulier de feuilletages est fourni par les actions non dégénérées de groupe de Lie sur les variétés. Rappelons qu'une action Φ d'un groupe de Lie G sur la variété V est une application différentiable :

$$\Phi : G \times V \rightarrow V$$

telle que pour tout $\tau, \tau' \in G : \Phi(\tau, \Phi(\tau', x)) = \Phi(\tau \cdot \tau', x)$.

L'action Φ est dite non dégénérée, si $d_x \Phi : TG \rightarrow TV$ est de rang maximum. On supposera que $\dim G \leq \dim V$. Dans ce cas, la non-dégénérescence signifie que pour $\forall x$ fixé, $x \in V$, $\Phi(\tau, x)$ est une immersion de G dans V , ce qui est équivalent à dire que le sous-groupe d'isotropie en x , $H_x = \{\tau \in G \mid \Phi(\tau, x) = x\}$, est discret dans G . On appellera orbite de Φ par x , l'image de cette immersion.

Dans ce cas, l'ensemble des orbites de Φ définit un feuilletage de V de dimension égale à celle de G . Dans la suite, on s'intéressera uniquement au cas : $G = \mathbf{R}^k$ muni de sa loi additive. Les sous-groupes discrets de \mathbf{R}^k étant isomorphes à Z^l avec $l \leq k$ (voir [1]), les orbites d'actions non dégénérées de \mathbf{R}^k sont des immersions injectives d'espaces homogènes du type \mathbf{R}^k/Z^l , où Z^l désigne un sous-groupe discret de \mathbf{R}^k . En particulier, une orbite L est compacte si, et seulement si, $l = k$, autrement dit si et seulement si L est difféomorphe au tore T^k de dimension k .

La donnée d'une action de \mathbf{R}^k est équivalente à la donnée de k champs $X_1 \dots X_k$ commutant deux à deux, dans le cas où V est compacte. Si $X_i(u_i, x)$ désigne le flot de X_i , $u_i \in \mathbf{R}$, $[X_i, X_j] = 0$ est équivalent à :

$$\text{pour } \forall u_i, u_j \in \mathbf{R} \text{ et } x \in V : X_i(u_i, X_j(u_j, x)) = X_j(u_j, X_i(u_i, x))$$

ce qui permet d'associer aux champs X_1, \dots, X_k l'action :

$$\Phi(u_1, \dots, u_k, x) = X_1(u_1, X_2(u_2, \dots, X_k(u_k, x)) \dots)$$

Réciproquement, si Φ est une action, on peut lui associer les champs :

$$X_i(x) = d\Phi_{(0, x)}(\partial/\partial u_i, 0)$$

Les deux opérations décrites ci-dessus sont manifestement inverses l'une de l'autre. Pour qu'une action soit non dégénérée, il faut et suffit que les k champs qui lui sont associés soient linéairement indépendants en tout point.

Appelons rang de la variété, le nombre maximum de champs de vecteurs commutants, linéairement indépendants en tout point. Si la variété est compacte, ce nombre est aussi le plus grand entier k , tel

qu'il existe une action non dégénérée de \mathbf{R}^k sur la variété. Si la variété n'est pas compacte, ce dernier nombre est en général différent du rang : ainsi, $\mathbf{R}^3 - \{0\}$ est de rang trois, mais il n'existe d'action non dégénérée de \mathbf{R}^k sur $\mathbf{R}^3 - \{0\}$ pour aucun $k > 1$, comme l'a montré H. Rosenberg [14].

Le rang des variétés compactes de dimension trois a été étudié par E. Lima et H. Rosenberg. Rappelons leurs principaux résultats :

E. Lima a établi que le rang S^3 est égal à 1 [7], H. Rosenberg, qu'il en est de même pour $S^1 \times S^2$ [13], et pour les variétés V compactes telles que $\pi_2(V) \neq 0$.

Comme conséquence du résultat sur les feuilletages de Reeb, il est démontré dans [16] que le rang est 1, pourvu que $H_1(V, \mathbf{Q}) = 0$, si \mathbf{Q} est le corps des rationnels. Puisque toute variété de dimension 3 possède des champs de vecteurs sans zéro, le rang est au moins égal à un, et le résultat ci-dessus peut s'énoncer de la façon suivante :

Si le premier nombre de Betti de V est nul, alors deux champs de vecteurs commutants quelconques sur V sont linéairement dépendants en un point au moins.

Enfin, l'auteur, en collaboration avec H. Rosenberg et D. Weil a obtenu un résultat de classification des variétés de dimension 3, compactes, orientables, en fonction de leur rang [17]. Ce résultat peut s'énoncer comme suit :

- a) La seule variété de rang trois est le tore $T^3 \approx S^1 \times S^1 \times S^1$.
- b) Pour qu'une variété soit de rang deux, il faut et il suffit qu'elle soit fibrée sur S^1 avec pour fibre le tore de dimension deux, et que cette fibration ne soit pas triviale :

$$V = T^2 \times [0, 1]/(x, 0) \sim (f(x), 1)$$

où f est un difféomorphisme de T^2 non isotope à l'identité.

- c) Les autres variétés, c'est-à-dire les variétés qui ne sont pas fibrées sur S^1 avec fibre T^2 sont les variétés de rang un.

Ce dernier résultat généralise les résultats cités plus haut. On rappellera sa démonstration dans la dernière partie.

Le plan de la suite est le suivant : dans les parties I et II, on donne quelques exemples de feuilletages de variétés de dimension 3 et quelques résultats utiles pour la suite. La partie III contient des

résultats sur les plongements de variétés dans les variétés feuilletées, utilisés dans les parties IV et V pour l'établissement des théorèmes relatifs aux feuilletages de Reeb et aux actions. Leurs démonstrations ne seront qu'esquissées. On se rapportera à [14] et [15] pour plus de précisions. Par ailleurs, les résultats de la partie III seront utilisés dans la partie IV pour obtenir des renseignements sur les classes de conjugaison de feuilletages.

TABLE DES MATIERES

	Pages
INTRODUCTION	13
PARTIE I. — QUELQUES EXEMPLES DE FEUILLETAGES	19
A. Feuilletages de S^3	19
B. Feuilletages définis par des actions non dégénérées ..	23
PARTIE II. — QUELQUES RESULTATS PRELIMINAIRES	26
A. Quelques généralités sur les feuilletages de codimen- sion 1	26
B. Résultats topologiques	34
PARTIE III. — QUELQUES PROPRIETES DES PLONGEMENTS DE VA- RIETES DANS LES VARIETES FEUILLETEES	36
A. Position générale	36
B. Le théorème fondamental pour les feuilletages sans cycle limite	38
C. Théorème de Schonflies pour les variétés feuilletées ..	45
D. Elimination de points de contact de plongements ...	46
PARTIE IV. — LES FEUILLETAGES DE REEB	54
A. Les variétés possédant des feuilletages de Reeb	54
B. Classes de conjugaison de feuilletages de Reeb.....	58
PARTIE V. — CLASSIFICATION DES VARIETES EN FONCTION DE LEUR RANG	68
A. Démonstration du théorème 2	70
B. Démonstration du lemme fondamental	73
APPENDICE	77
BIBLIOGRAPHIE	80

PARTIE I

QUELQUES EXEMPLES DE FEUILLETAGES

A. Feuilletages de S^3 .

Chaque feuilletage de S^3 possède au moins une composante de Reeb (orientable). [9]. On rappelle dans le premier paragraphe la construction de ce feuilletage. Dans les paragraphes suivants, on construit certains feuilletages de S^3 .

1. Composantes de Reeb [12].

Soit $f : D^2 \rightarrow \mathbf{R}$, une application C^∞ du disque dans \mathbf{R} telle que les propriétés suivantes soient satisfaites :

i) f est de la forme : $f(x, y) = \varphi(x^2 + y^2)$

où (x, y) sont les coordonnées de :

$$D^2 = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$$

et φ une fonction C^∞ .

ii) $f(\partial D^2) = 0$ et $f(m) > 0$ pour $m \notin \partial D^2$

iii) f n'a pas de points critiques sur ∂D^2 .

Considérons l'application $C^\infty : F : D^2 \times \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$

définie par : $F(m, z) = f(m) e^z$ où $m \in D^2$ et $z \in \mathbf{R}$

F est une submersion de $D^2 \times \mathbf{R}$ sur \mathbf{R} et définit un feuilletage \mathfrak{F}_0 de $D^2 \times \mathbf{R}$ dont les feuilles sont les surfaces de niveau de F :

$$F^{-1}(a) \quad \text{pour } a \geq 0$$

Comme : $F(m, z + 1) = e \cdot F(m, z)$

et que : $F((x, y), z) = F((-x, y), z)$

\mathfrak{F}_0 définit un feuilletage sur les variétés quotient suivantes de $D^2 \times \mathbf{R}$:

le tore solide : $D^2 \times S^1 = D^2 \times \mathbf{R} / (m, z) \sim (m, z + 1)$

la bouteille de Klein solide : $K = D^2 \times \mathbf{R} / ((x, y), z) \sim ((-x, y), z + 1)$

Le feuilletage ainsi défini admet une seule feuille compacte : le bord de $D^2 \times S^1$ ou de K respectivement difféomorphe au tore T^2 de dimension 2, et à la bouteille de Klein. Toutes les autres feuilles sont difféomorphes à \mathbb{R}^2 . Le feuilletage défini sur $D^2 \times S^1$ sera appelé composante de Reeb orientable ; le feuilletage défini sur K sera appelé composante de Reeb non orientable. Une composante de Reeb appartenant à un feuilletage de S^3 ou d'une autre variété orientable est évidemment orientable.

2. Tourbillonnement de Reeb [12].

Cette opération permet de construire de nouveaux feuilletages par modification d'un premier feuilletage \mathfrak{F}_0 le long d'une transversale fermée.

Nous rappelons brièvement ce procédé :

Soit \mathfrak{F}_0 un feuilletage d'une variété V orientable de dimension 3, \mathfrak{F}_0 étant supposé de codimension 1. Supposons qu'il existe un lacet γ transverse à \mathfrak{F} et possédant un fibré normal trivial. Soit $D^2 \times S^1$ un voisinage tubulaire de γ , tel que $\gamma = (0, 0) \times S^1$ et que $D^2 \times \{t\}$ appartienne à une feuille notée L_t de \mathfrak{F}_0 pour tout $t \in S^1$.

Soit une fonction $C^\infty f : D^2 \rightarrow \mathbb{R}$ telle que :

i) $f(m) = 1$ pour $m \in U$ voisinage de ∂D^2 .

ii) $f^{-1}(0) = \partial D_0$ ou $D_0 = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq \frac{1}{2} \right\}$

iii) 0 est valeur régulière de f .

Considérons $F(m, z) = f(m) e^z$, application de $D^2 \times \mathbb{R}$ dans \mathbb{R} , qui définit un feuilletage \mathfrak{F}_1 de $D^2 \times S^1$ comme au 1. Ce feuilletage coïncide avec le feuilletage \mathfrak{F}_0 dans le voisinage $U \times S^1$ et contient une composante de Reeb : $D_0 \times S^1$. \mathfrak{F}_0 restreint à $V - D^2 \times S^1$ et \mathfrak{F}_1 sur $D^2 \times S^1$ définissent un feuilletage \mathfrak{F} de V .

On peut enlever la composante de Reeb $D_0 \times S^1$ et la recoller différemment sur le tore $\partial D_0 \times S^1$ bord de $V - D_0 \times S^1$. On obtient ainsi une nouvelle variété feuilletée V' :

$V' = (V - D_0 \times S^1) \underset{f}{\cup} D_0 \times S^1$ où f est un difféomorphisme de $\partial D_0 \times S^1$.

3. Construction de feuilletage de S^3 par la méthode de tourbillonnement.

Rappelons tout d'abord un théorème dû à Wallace [23]. Pour toute variété V , compacte, orientable, sans bord, de dimension 3, il existe un ensemble de tores solides T_i , $i \in [1, \dots, k]$, plongés d'une façon disjointe dans V , et un ensemble de tores solides T'_i , $i \in [1, \dots, k]$ plongés d'une façon disjointe dans S^3 , tels que :

$$V - \bigcup_i \text{int } T_i \quad \text{soit difféomorphe à} \quad S^3 - \bigcup_i \text{int } T'_i .$$

Soit la variété $V = M \times S^1$ où M est une variété de dimension 3 sans bord, compacte, orientable, de genre quelconque. V est munie naturellement du feuilletage \mathcal{F}_0 défini par la projection : $M \times S^1 \rightarrow S^1$.

Un argument de J. Wood (lemme 4.3 de [24]) montre que l'on peut choisir les tores T_i et T'_i dans le théorème précédent de façon que chaque T_i soit transverse à \mathcal{F}_0 . (La démonstration du lemme de Wood est faite pour le fibré non trivial sur S^1 de fibre S^2 , mais elle s'applique en fait à tout fibré sur S^1 , sans modification aucune).

La méthode décrite au paragraphe 2 permet de modifier alors le feuilletage \mathcal{F}_0 de V en un feuilletage \mathcal{F}_1 de S^3 ayant, en dehors des composantes de Reeb (relatives aux tores T'_i du théorème), des feuilles difféomorphes à M moins un nombre fini de points.

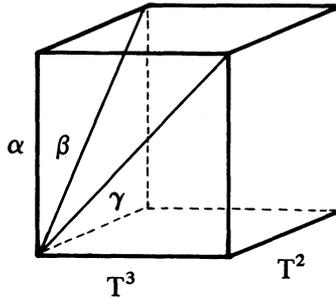
Donnons quelques exemples de feuilletages ainsi construits :

a) Soit $M = S^2 = D_+ \cup D_-$ où D_+ et D_- désignent deux hémisphères de S^2 . On peut prendre $T = D_+ \times S^1 \subset S^2 \times S^1$ et T' un tore solide non noué dans S^3 . On a bien : $S^2 \times S^1 - T$ difféomorphe à $S^3 - T'$.

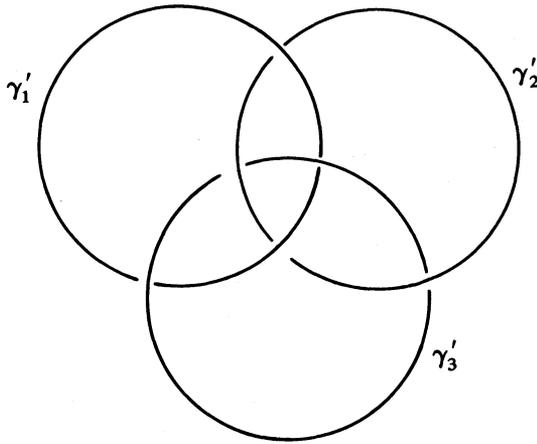
La méthode précédente conduit au feuilletage de S^3 formé de deux composantes de Reeb identifiées sur leur bord.

b) Soit $M = T^2 = S^1 \times S^1$; $V = T^3 = (S^1 \times S^1) \times S^1$.

Soient trois lacets disjoints de T^3 , γ_1 , γ_2 , γ_3 isotopes aux trois lacets représentés ci-après :



Considérons des voisinages tubulaires disjoints de ces trois lacets : T_1, T_2, T_3 . Il est facile de montrer que $T^3 - \bigcup_{i=1}^3 \text{int } T_i$ est difféomorphe à $S^3 - \bigcup_{i=1}^3 \text{int } T'_i$ où les T'_i sont des voisinages tubulaires des trois lacets $\gamma'_1, \gamma'_2, \gamma'_3$ de S^3 représentés ci-dessous :



On trouvera les détails de ce résultat dans [3].

Le feuilletage obtenu par la méthode du paragraphe 2, dans ce cas particulier, possède des feuilles difféomorphes à T^2 moins trois points, dans le complémentaire des composantes de Reeb, qui apparaissent comme voisinage tubulaire des lacets $\gamma'_1, \gamma'_2, \gamma'_3$.

4. *Autres exemples de feuilletages.*

On peut définir d'autres exemples de feuilletage de S^3 , en utilisant le théorème de fibration de Stallings [22], dont l'énoncé sera rappelé dans la partie II : Si k est un nœud dont le groupe a un commutateur de type fini, le complémentaire dans S^3 d'un voisinage tubulaire T de k est fibré sur S^1 .

Cette fibration fournit un feuilletage \mathcal{F} de $S^3 - \text{int } T$, qui induit sur ∂T un feuilletage par cercles. Soit $1/2 T$ le tube de rayon moitié. \mathcal{F} se prolonge en un feuilletage de $S^3 - \text{int}(1/2 T)$ de sorte que $\partial(1/2 T)$ soit une feuille ; il se prolonge donc à S^3 en plaçant une composante de Reeb dans $1/2 T$. Si k est un nœud torique de type (p, q) , la fibre est de genre $1/2 (p - 1)(q - 1)$, nombre qui peut prendre toutes les valeurs entières.

5. *Conclusion.*

Les exemples de feuilletages de S^3 fournis plus haut diffèrent par le nombre et la disposition des composantes de Reeb. Ainsi, nous avons donné deux exemples de feuilletages dont les feuilles, en dehors des composantes de Reeb, sont difféomorphes à T^2 moins un nombre fini de points : dans l'un des exemples (au 3) les composantes de Reeb sont voisinages tubulaires de trois lacets simples et enlacés, dans l'autre (au 4), il n'y a qu'une seule composante, voisinage du nœud en forme de trèfle.

D'une façon générale, le théorème de Novikov [9] montre qu'il existe des composantes de Reeb dans tout feuilletage de S^3 , et que chacune d'elle est soit nouée, soit enlacée à d'autres composantes. (Les deux éventualités pouvant se combiner). Pour l'étude des classes de conjugaison de feuilletages de S^3 , il serait intéressant de déterminer quels sont les systèmes de lacets de S^3 possédant des voisinages tubulaires disjoints susceptibles d'être les composantes de Reeb d'un feuilletage de S^3 .

B. *Feuilletages définis par des actions non dégénérées.*

Aucun des feuilletages de S^3 décrits plus haut ne peut être défini par une action. En effet, une telle action laisserait invariante les

composantes de Reeb : autrement dit elle induirait des actions sur $D^2 \times S^1$, telles que le bord : $\partial(D^2 \times S^1)$ soit une orbite. De telles actions n'existent pas comme l'a montré E. Lima [7].

Donnons maintenant quelques exemples de feuilletages définis par des actions.

1. Actions non dégénérées de \mathbb{R}^2 sur T^3 .

Ecrivant T^3 comme $\mathbb{R}^3/\mathbb{Z}^3$, nous voyons que deux champs de vecteurs constants sur \mathbb{R}^3 , linéairement indépendants, induisent une action non-singulière de \mathbb{R}^2 sur T^3 . En particulier, considérons les cas suivants :

i) Soient les deux champs $X = (1, 0, 0)$ et $Y = (0, 1, 0)$. Toutes les orbites définies par cette action sont compactes et homéomorphes à T^2 .

Si α et β sont deux nombres irrationnels, rationnellement indépendants :

ii) Soient les deux champs : $X = (1, 0, 0)$ et $Y = (0, 1, \beta)$. Toutes les orbites de cette action sont cylindriques (homéomorphes à $S^1 \times \mathbb{R}$) et denses dans T^3 .

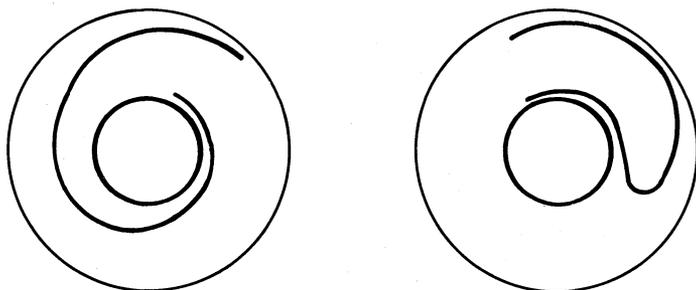
iii) Soient $X = (1, 0, \alpha)$ et $Y = (0, 1, \beta)$. Toutes les orbites de cette action sont homéomorphes à \mathbb{R}^2 et denses dans T^3 . Nous l'appellerons action irrationnelle associée au couple (α, β) . Le feuilletage associé à cette action est un feuilletage de Reeb de T^3 .

2. Actions non-dégénérées de \mathbb{R}^2 sur $T^2 \times [0, 1]$.

Représentons $T^2 \times [0, 1]$ comme le quotient de :

$$M = \{(x_1, x_2, x_3) \mid 1 \leq x_1^2 + x_2^2 \leq 2, 0 \leq x_3 \leq 1\}$$

sous l'identification $(x_1, x_2, 1) \sim (f(x_1, x_2), 0)$ où f est un difféomorphisme isotope à l'identité. Dans la couronne $x_3 = 0$, il y a deux feuilletages tels que chaque feuille dans l'intérieur de la couronne soit homéomorphe à \mathbb{R} et tel que les deux cercles du bord soient des feuilles (voir figure ci-après).



Ces feuilletages peuvent être choisis invariant par les rotations de la couronne. Définissons des feuilletages de M en prenant le produit de ces deux feuilletages de la couronne par $[0, 1]$. Si f est une rotation irrationnelle, ils définissent deux feuilletages de Reeb de $T^2 \times [0, 1]$ qui ne sont pas topologiquement équivalents.

Maintenant il est très facile de construire des actions de \mathbf{R}^2 dont les orbites sont les feuilles des feuilletages définis plus haut, au moyen de deux champs X et Y dont l'un est tangent aux couronnes $x_3 = C^t$, et dont l'autre est transversal à ces mêmes couronnes ([18]).

Dans [18], on peut trouver d'autres exemples d'actions sur $T^2 \times [0, 1]$, telles que les feuilletages associés ne soient pas des feuilletages de Reeb.

PARTIE II

QUELQUES RESULTATS PRELIMINAIRES

Dans cette partie, nous passons en revue quelques résultats classiques concernant les feuilletages de codimension 1. Ceci fait l'objet du paragraphe A. Dans le paragraphe B sont énoncés des théorèmes connus relatifs à la topologie des variétés de dimension 3 ; ces théorèmes seront utilisés dans les parties suivantes.

A. Quelques généralités sur les feuilletages de codimension 1.

Pour étudier le comportement d'un feuilletage au voisinage d'un point x d'une feuille L , C. Ehresmann a introduit la notion d'holonomie. Soit T_x une sous-variété transverse en x au feuilletage. L'holonomie en x du feuilletage est une représentation du groupe fondamental $\pi_1(L, x)$ dans le groupe des germes de difféomorphismes de T_x laissant fixe le point x . Nous allons préciser cette notion.

On désigne par V une variété munie d'un feuilletage \mathcal{F} de codimension 1, de classe $r \geq 1$. Soit γ un chemin continu d'une feuille L de \mathcal{F} ; γ est une application continue :

$$\gamma : [0, 1] \rightarrow L .$$

On notera $\gamma(0) = p_0$ et $\gamma(1) = p_1$.

Soit Δ un champ de directions transverse à \mathcal{F} , de classe $r \geq 1$; donc Δ est complètement intégrable. Soit $n : [-1, +1] \rightarrow V$, un segment différentiable d'intégrale du champ Δ (n est un segment tangent en chaque point à Δ), tel que $n(0) = p_0$.

Ceci étant, la notion d'holonomie peut être introduite d'une manière très géométrique à l'aide des lemmes 1 et 2 ci-dessous. On peut trouver des résultats analogues dans la thèse de G. Reeb [12]. En particulier, le lemme 2 est une forme déguisée du théorème de stabilité. C'est sous cette forme cependant que ce théorème a le plus d'applications. Elle est utilisée en particulier dans les démonstrations des théorèmes III C et III D ci-dessous. (Voir également l'appendice de [16]).

Le lemme 2 n'ayant jamais été constaté dans la littérature sous cette forme, à notre connaissance du moins, il nous a semblé justifié d'en donner une démonstration détaillée. Le lemme 1 peut être considéré comme un cas particulier du lemme 2. Nous le présentons indépendamment du lemme 2 : sa démonstration, plus simple, a un intérêt en soi et constitue la première étape de la démonstration du lemme suivant.

LEMME 1. — Soit V une variété munie d'un feuilletage \mathcal{F} de codimension 1. Soient γ un chemin continu d'une feuille L , Δ un champ de directions et $n(\tau)$ un segment d'intégrale de Δ , comme plus haut.

Alors il existe un $\varepsilon > 0$ et une application continue $\Gamma(t, x) : \Gamma : [-\varepsilon, +\varepsilon] \times [0, 1] \rightarrow V$ tels que :

- i) $\Gamma(0, x) = \gamma(x)$
- ii) Pour tout $x \in [0, 1]$, l'application $t \rightarrow \Gamma(t, x)$ définit un segment d'intégrale du champ Δ avec pour $x = 0 : \Gamma(t, 0) = n(t)$.
- iii) Pour tout $t \in [-\varepsilon, +\varepsilon]$, l'application $x \rightarrow \Gamma(t, x)$ soit un chemin continu de la feuille L_t passant par le point $n(t)$. ($L_0 = L$).

De plus, γ , Δ , n et ε étant donnés, il existe une seule application Γ avec les propriétés ci-dessus. On appellera Γ : le relèvement du chemin γ , de hauteur ε sur les feuilles voisines (le long des trajectoires de Δ).

Démonstration. — Il existe une suite finie U_1, \dots, U_k d'ouverts distingués du feuilletage recouvrant γ et une suite croissante

$$x_0 = 0 < x_1 \dots < x_k = 1,$$

tels que $\gamma([x_{j-1}, x_j]) \subset U_j$ pour $j \in [1, \dots, k]$. (Les ouverts U_j ne sont pas nécessairement distincts).

En particulier, $\gamma([x_0, x_1]) \subset U_1$. Clairement, il existe un $\varepsilon_1 > 0$ et un relèvement Γ_1 du chemin $\gamma|_{[x_0, x_1]}$ de hauteur ε_1 , défini par la formule :

$$\Gamma_1(x, t) = P_{n(t)} \cap T_{\gamma(x)} \quad (1)$$

où $P_{n(t)}$ désigne la plaque de U_1 passant par le point $n(t)$ et $T_{\gamma(x)}$ désigne la ligne intégrale de Δ par le point $\gamma(x)$. Si ε_1 est suffisamment petit, Γ_1 est bien défini pour tout $(t, x) \in [-\varepsilon_1, +\varepsilon_1] \times [x_0, x_1]$.

Soit $n_1(t)$ un segment d'intégrale de Δ par le point $\gamma(x_1)$.

On définit de même un relèvement Γ_2 du chemin $\gamma|_{[x_1, x_2]}$ dans l'ouvert U_2 . Si maintenant $\varepsilon_2 > 0$, $\varepsilon_2 \leq \varepsilon_1$, est choisi suffisamment petit pour que le relèvement Γ_2 soit défini pour les points du segment $\{\Gamma_1(t, x_1) \mid -\varepsilon_2 \leq t \leq +\varepsilon_2\}$, on peut combiner Γ_1 et Γ_2 en un relèvement Γ_{12} du chemin $\gamma|_{[x_0, x_2]}$, de hauteur ε_2 :

$$\Gamma_{12} = \Gamma_1 \quad \text{pour } x \in [x_0, x_1]$$

$$\Gamma_{12}(t, x) = \Gamma_2(\varphi_1(t), x) \quad \text{pour } x \in [x_1, x_2]$$

où φ_1 est le difféomorphisme défini par :

$$\Gamma_1(t, x_1) = n_1(\varphi_1(t))$$

Les deux définitions de Γ_{12} se raccordent en x_1 car

$$\Gamma_2(t, x_1) = n_1(t) .$$

On poursuit ainsi de proche en proche en utilisant des relèvements Γ_i des chemins $\gamma|_{[x_{i-1}, x_i]}$, donnés par la formule (1). On trouve de cette façon un relèvement Γ du chemin γ , défini sur une certaine hauteur $\varepsilon > 0$.

Montrons maintenant que le relèvement Γ ainsi trouvé est unique. Si Γ est entièrement contenu dans un voisinage distingué, les conditions i), . . . , iii) de l'énoncé impliquent que Γ est défini par la formule (1) ci-dessus, et est donc unique. Dans le cas général, le relèvement Γ peut être recouvert par un nombre fini d'ouverts distingués et se décompose en une succession de relèvements contenus chacun dans un ouvert distingué et donc uniquement déterminés à partir de leurs conditions initiales. Il en résulte par récurrence que Γ lui-même est uniquement déterminé. En particulier, il ne dépend pas des ouverts U_j ayant servi à établir son existence. ■

Nous pouvons maintenant énoncer le lemme 2 :

LEMME 2 (Lemme de stabilité). — Soit K un compact, connexe par arc, et x_0 un point base de K . Soit f une application continue de K dans une feuille L de \mathfrak{F} , homotope à une application constante. Δ désignant un champ de directions transverse à \mathfrak{F} , soit $n(t)$ un segment d'intégrale de Δ tel que $n(0) = f(x_0)$. Alors, il existe un $\varepsilon > 0$ et une application continue F :

$$F : [-\varepsilon, +\varepsilon] \times K \rightarrow V$$

tels que :

i) $F(0, x) = f(x)$ pour tout $x \in K$.

ii) Pour tout $x \in K$, l'application $t \rightarrow F(t, x)$ définit un segment d'intégrale de Δ , avec $F(t, x_0) = n(t)$.

iii) Pour tout $t \in [-\varepsilon, +\varepsilon]$, $F(t, K) \subset L_t$ où L_t désigne la feuille de \mathfrak{F} passant par le point $n(t)$ ($L = L_0$).

De plus, f , Δ , n et ε étant donnés, il existe une seule application F avec les propriétés ci-dessus. On appellera F : le relèvement de f de hauteur ε , sur les feuilles voisines, (le long des trajectoires de Δ).

Démonstration. — Soit $h(\tau, x)$ une homotopie de f à une application constante :

$$h : [0, 1] \times K \rightarrow L$$

avec $h(1, x) = f(x)$ pour tout $x \in K$

et $h(0, K) = m \in L$

On suppose, en outre, h choisie de façon que $m = f(x_0)$.

Désignons par γ_x le chemin défini par $\tau \rightarrow h(\tau, x)$ pour tout $x \in K$. Le chemin γ_x a pour origine le point $m = f(x_0)$ et pour extrémité le point $f(x)$.

Pour tout $x \in K$, il existe une suite d'ouverts distingués U_1, \dots, U_k recouvrant le chemin γ_x et une suite croissante :

$$\tau_0 = 0 < \tau_1 < \dots < \tau_k = 1, \quad \text{tels que :}$$

$$\gamma_x([\tau_{j-1}, \tau_j]) \subset U_j \quad \text{pour tout } j \in [1, \dots, k] \quad (2)$$

Comme le chemin γ_y dépend continuellement de $y \in K$, il existe un ouvert W_x de tout point $x \in K$, tel que pour $\forall y \in W_x$, le chemin γ_y possède la propriété (2) ci-dessus, relativement à la suite de τ_i associée au point x .

L'ensemble K étant compact, il existe un ensemble fini x_1, \dots, x_l tel que les ouverts W_{x_1}, \dots, W_{x_l} recouvrent K .

Soit $j \in [1, \dots, l]$. A x_j est associé une suite d'ouverts distingués U_1^j, \dots, U_k^j . Pour tout point y de W_{x_j} , cette suite permet de définir un relèvement noté Γ_y^j , du chemin γ_y sur une hauteur $\varepsilon_j > 0$ ne

dépendant pas du point y considéré comme on peut s'en convaincre en examinant la démonstration du lemme 1.

Soit $\varepsilon = \inf(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_l)$.

On définit maintenant $F(x, t)$ pour $x \in K$ et $|t| \leq \varepsilon$ par :

$$F(x, t) = \Gamma_x^j(t, 1) \quad \text{si } x \in W_{x_j}$$

En vertu de l'unicité de relèvement au-dessus du chemin γ_x , si $x \in W_{x_i} \cap W_{x_j}$:

$$\Gamma_x^j(t, 1) = \Gamma_x^i(t, 1) \quad \text{pour } -\varepsilon \leq t \leq +\varepsilon.$$

Donc F est bien définie. D'autre part, F étant localement égale aux fonctions $\Gamma_x^j(t, 1)$ est continue. En effet, les fonctions $\Gamma_x^j(t, 1)$, étant construites à l'aide d'un même recouvrement U_1^j, \dots, U_k^j , dépendent continuellement de $(x, t) \in W_{x_j} \times [-\varepsilon, +\varepsilon]$.

Enfin, l'unicité de F découle de l'unicité établie au lemme 1 : si $x \in K$ est un point quelconque, choisissons arbitrairement un chemin γ de x_0 à x . F restreint à γ est un relèvement de γ de hauteur ε . Un tel relèvement étant unique, une fois donnés f , Δ , n et ε . (En particulier, F ne dépend pas de l'homotopie h , choisie au début de la démonstration). ■

Remarque. — Si K est une variété différentielle et f un plongement de K dans L , il est clair par construction que l'application $x \rightarrow F(t, x)$ est un plongement de K dans la feuille L_t pour $t \in [-\varepsilon, +\varepsilon]$.

Nous pouvons maintenant préciser la notion d'holonomie. Soit γ un chemin continu d'une feuille L , entre deux points p_0 et p_1 . Désignons par T_0 et T_1 des segments d'intégrale d'un champ de droites Δ , passant par ces deux points. Soit Γ le relèvement de γ de hauteur $\varepsilon > 0$, ε suffisamment petit. Considérons le difféomorphisme local φ_γ de T_0 dans T_1 défini par :

$$\varphi_\gamma : n(t) \in T_0 \rightarrow \Gamma(t, 1) \in T_1$$

où $n(t)$ est le paramétrage de T_0 pour lequel le relèvement Γ est défini.

Si l'on revient à la démonstration du lemme 1, on s'aperçoit que φ_γ dépend des segments T_0 et T_1 , mais non du champ Δ choisi. De plus, le lemme 2 a pour conséquence que ce difféomorphisme a un

germe en p_0 ne dépendant que de la classe d'homotopie du chemin γ . (En effet, si γ et γ' sont deux chemins entre p_0 et p_1 , homotopes entre eux, ces deux applications de $[0, 1]$ dans L , se prolongent en une application de $[0, 1] \times [0, 1]$ dans L , qui est évidemment homotope à une application constante).

Si maintenant $p_0 = p_1$ et $T_0 = T_1$, γ est un lacet de L en p_0 . Désignons par $[\gamma]$ la classe de γ dans $\pi_1(L, p_0)$ et par G le groupe des germes de difféomorphismes de T_0 préservant le point p_0 . L'application qui associe φ_γ à γ définit une application φ_{p_0} de $\pi_1(L, p_0)$ dans G . φ_{p_0} est un homomorphisme d'après le lemme 1. Le groupe d'holonomie en p_0 du feuilletage est par définition le sous-groupe de G image de $\pi_1(L, p_0)$ par φ_{p_0} . On dira que l'holonomie est triviale si le groupe d'holonomie est réduit à un élément.

Soit \tilde{G} le groupe des germes de difféomorphismes de \mathbb{R} dans \mathbb{R} préservant le point zéro. Si l'on choisit un paramétrage de T_0 tel que le point p_0 corresponde au point zéro, le groupe d'holonomie en p_0 est représenté par un sous-groupe de \tilde{G} .

Il est facile de voir qu'un changement du paramétrage ou un changement du segment T_0 modifie ce sous-groupe par un automorphisme intérieur dans \tilde{G} .

On a coutume d'appeler improprement groupe d'holonomie en p_0 , la classe d'équivalence à automorphismes intérieurs près, ainsi définie. Cette classe ne dépend que du point p_0 et du feuilletage.

On peut déduire du lemme 2, le résultat suivant qui nous sera également utile dans la prochaine partie :

LEMME 3. — Soit $f : [0, 1] \times S^1 \rightarrow V$, une application continue, telle que :

- i) $f(t, S^1)$ appartienne à une feuille notée L_t pour tout $t \in [0, 1]$.
- ii) L'application $x \rightarrow f(0, x)$ de S^1 dans L_0 soit homotope à une application constante.

Alors, il existe un $\varepsilon > 0$, tel que l'application $x \rightarrow f(t, x)$ de S^1 dans L_t soit homotope à une application constante dans L_t , pour t , $0 \leq t \leq \varepsilon$.

Démonstration. — Notons $f(t, x)$ par $f_t(x)$. Soit Δ un champ de directions transverse au feuilletage et de classe $r \geq 1$. Soient x_0 un point de S^1 et n un segment d'intégrale du champ Δ :

$$n : [-1, +1] \rightarrow V \quad \text{avec } n(0) = f_0(p_0)$$

f_0 étant homotope à zéro dans L_0 , se prolonge en une application F_0 du disque D^2 dans L_0 : $F_0|_{(\partial D^2 = S^1)} = f_0$.

D'après le lemme 2, il existe un relèvement unique F_t de F_0 dans les feuilles voisines, le long des lignes intégrales de Δ et prolongeant le relèvement n de $f_0(x_0)$ sur une hauteur $\varepsilon_1 > 0$:

$$F_t(x) : [-\varepsilon_1, +\varepsilon_1] \times D^2 \rightarrow V \quad \text{avec } F_t(x_0) = n(t)$$

Soit U un voisinage distingué du point $f_0(x_0)$ tel que $U \cap n(t)$ soit réduit à un intervalle.

Le chemin défini par $t \rightarrow f_t(x_0)$ ayant pour origine $f_0(x_0)$, il existe un $\varepsilon_2 > 0$ suffisamment petit pour que :

$$- f_t(x_0) \in U \quad \text{pour } t \leq \varepsilon_2.$$

— la plaque de U par le point $f_t(x_0)$ coupe $n(t)$ en un point unique.

Il existe donc une fonction continue $\varphi : [0, \varepsilon_2] \rightarrow [-\varepsilon_1, +\varepsilon_1]$ telle que $\varphi(0) = 0$, définie par la condition :

Les deux points $f_t(x_0)$ et $n(\varphi(t))$ appartiennent à la même plaque de U . Il en résulte que $F_{\varphi(t)}(S^1) \subset L_t$.

Comme les applications f et F sont continues, il existe un $\varepsilon > 0$ tel que pour tout t , $0 \leq t \leq \varepsilon$, $f_t(S^1)$ et $F_{\varphi(t)}(S^1)$ soient suffisamment proches dans L_t pour être homotopes. Comme $F_{\varphi(t)}(S^1)$ est homotope à une application constante dans L_t , il en est de même pour $f_t(S^1)$ pour $0 \leq t \leq \varepsilon$. ■

Les lemmes 1, 2 et 3 ci-dessus, ainsi que la notion d'holonomie, peuvent se généraliser sans difficultés aux feuilletages de codimension quelconque. Il n'en est plus de même pour le théorème de stabilité globale de G. Reeb [12] ; la conclusion ne reste vraie qu'en codimension un. Rappelons l'énoncé de ce résultat :

1. Théorème de stabilité globale.

Soit V une variété compacte, \mathfrak{F} un feuilletage de codimension 1,

transversalement orientable. Supposons que \mathcal{F} possède une feuille compacte L , simplement connexe. Alors toutes les feuilles de \mathcal{F} sont homéomorphes à L .

Ce rappel sur la notion de stabilité étant achevé, nous allons maintenant signaler quelques résultats de S.P. Novikov.

Nous appellerons cycle limite du feuilletage, au sens de Novikov, la donnée d'une application continue $f : [0, 1] \times S^1 \rightarrow V$, telle que :

- i) $f_t(S^1)$ appartienne à une feuille notée L_t , pour tout $t \in [0, 1]$.
- ii) $f_0(S^1)$ ne soit pas homotope à une application constante dans L_0 , mais que $f_t(S^1)$ pour tout t , $0 < t \leq 1$, soit homotope à une application constante dans L_t .
- iii) Pour tout $x \in S^1$, les chemins $t \rightarrow f_t(x)$ soient topologiquement transverses à \mathcal{F} . (Ceci signifie que si φ est une application distinguée quelconque de \mathcal{F} et x un point quelconque de S^1 , l'application $t \rightarrow \varphi \cdot f(t, x)$ est un homéomorphisme local de \mathbb{R} dans \mathbb{R} , partout où elle est définie).

L'un des plus beaux résultats géométriques, concernant les feuilletages des variétés de dimension 3, est le théorème suivant, dû à S.P. Novikov :

THEOREME 2 [9]. — *Soit \mathcal{F} un feuilletage de codimension 1, transversalement orientable d'une variété compacte V de dimension 3. Si \mathcal{F} possède un cycle limite, alors ce feuilletage contient une composante de Reeb.*

La partie la plus délicate de la démonstration consiste à montrer que si \mathcal{F} possède un cycle limite f , \mathcal{F} possède également un cycle limite \tilde{f} et un champ transverse N avec les propriétés suivantes :

- i) Pour tout t , $\tilde{f}_t : S^1 \rightarrow L_t$ est un plongement différentiable de S^1 .
- ii) L'application $t \rightarrow \tilde{f}_t(x)$ pour tout $x \in S^1$, est un plongement dans une orbite de N .

Ce point établi, le théorème de Novikov résulte du résultat suivant, dont on trouvera par exemple une démonstration dans l'appendice de [16] :

THEOREME 3. — Soit \mathfrak{F} un feuilletage de codimension 1, d'une variété compacte de dimension 3. \mathfrak{F} est supposé transversalement orientable et muni d'un champ transverse N . Si $\tilde{f}_t(x)$ est un cycle limite avec les propriétés suivantes :

- i) $\tilde{f}_t : S^1 \rightarrow L_t$ est un plongement de S^1 , pour tout $t \in [0, 1]$.
- ii) L'application $t \rightarrow \tilde{f}_t(x)$ définit un segment d'orbite de N .

Alors, L_0 est homéomorphe à T^2 ou à la bouteille de Klein et est le bord d'une composante de Reeb, plongée dans V contenant les feuilles L_t .

Le dernier résultat concernant les feuilletages que nous utiliserons par la suite est le théorème suivant :

THEOREME DE SACKSTEDER 4. (Théorème 6 de [20]). — Soit \mathfrak{F} un feuilletage de codimension 1 et de classe C^2 au moins, d'une variété compacte V , sans bord. Supposons que \mathfrak{F} soit transversalement orientable et soit N un champ de vecteur transverse en chaque point à \mathfrak{F} .

Si l'holonomie de \mathfrak{F} est triviale, il existe un flot continu $n(\tau, x)$ dont les orbites sont celles de N et qui satisfait à :

$$n(\tau, L_x) = L_{n(\tau, x)} \quad \text{pour } \forall \tau \in \mathbb{R} \text{ et pour } \forall x \in V$$

où L_y désigne la feuille de \mathfrak{F} passant par y .

(Nous dirons, dans une telle situation, que n laisse le feuilletage \mathfrak{F} invariant).

B. Résultats topologiques.

1. "Loop Theorem" [10] (Papakyriakopoulos) :

Soit V une variété de dimension 3, B une composante connexe orientable de ∂V telle que l'injection $i : B \rightarrow V$ induise un homomorphisme : $i_{\#} : \pi_1(B) \rightarrow \pi_1(V)$ qui ne soit pas injectif. Alors, il existe une courbe fermée simple γ sur B , non homotope à zéro sur B , et telle que γ soit le bord d'un disque D , plongé dans V et transverse à B le long de γ .

2. *Théorème de fibration de Stallings [22].*

Soit V une variété irréductible, compacte, connexe de dimension 3, dont le bord est éventuellement non vide. Supposons qu'il existe une surjection $\varphi : \pi_1(V) \rightarrow Z$, dont le noyau soit de type fini et différent de $Z/2Z$. Alors V est un fibré sur S^1 de fibre difféomorphe à une variété A compacte, connexe, de dimension 2.

(La définition d'irréductibilité est donnée dans la partie III. Le théorème exprime que : $V = A \times [0, 1]/(x, 0) \sim (f(x), 1)$, où f est un difféomorphisme de A).

PARTIE III

QUELQUES PROPRIETES DES PLONGEMENTS DE
VARIETES DANS DES VARIETES FEUILLETEES

A. Position générale.

Soit V^{n+1} une variété de dimension $n + 1$, $n \geq 1$, compacte ou non, munie d'un feuilletage \mathcal{F} de codimension 1, de classe supérieure ou égale à 2. On désignera par $\{U_i\}_{i \in \Sigma}$ un recouvrement localement fini de V , par des ouverts distingués du feuilletage et par $\varphi_i : U_i \rightarrow \mathbb{R}$ les applications distinguées associées à ce recouvrement.

Soit W une variété compacte, orientable, de dimension k , $1 \leq k \leq n$, et une application différentiable Φ de W dans V , de classe $r \geq 2$.

DEFINITION. — *Nous dirons que Φ est une application en position générale par rapport à \mathcal{F} , si les conditions suivantes sont satisfaites :*

i) *Pour tout $i \in \Sigma$, $\varphi_i \circ \Phi$ est une fonction de Morse sur l'ouvert $\Phi^{-1}(U_i)$. (Ceci a un sens puisque $r \geq 2$).*

ii) *Les points critiques des fonctions $\varphi_i \circ \Phi$ ont des images situées sur des feuilles distinctes de \mathcal{F} .*

Si $x \in \Phi^{-1}(U_i) \cap \Phi^{-1}(U_j)$ et si $\varphi_i \circ \Phi$ est de Morse en x , alors $\varphi_j \circ \Phi$ est aussi de Morse en x . Il en résulte que la définition d'application en position générale ne dépend que du feuilletage \mathcal{F} et non du recouvrement $\{U_i\}_{i \in \Sigma}$.

Si Φ est un plongement de W , les points critiques intervenant dans la condition ii), s'interprètent comme les points de contact du plongement Φ avec les feuilles de \mathcal{F} . En dehors de ces points l'image de Φ et les feuilles de \mathcal{F} sont transverses dans V .

Soit Φ_0 une application différentiable de W dans V . Si $\partial W \neq \emptyset$ on supposera que Φ_0 est transverse à \mathcal{F} dans un voisinage de ∂W . (Cela n'implique pas que $\Phi_0|_{\partial W}$ soit transverse à \mathcal{F}).

Désignons par : $C_r(W, V; [\Phi_0]_{\partial W})$, $r \geq 2$

l'espace des applications différentiables de W dans V , de classe r , ayant

même germe que Φ_0 le long de ∂W (cela signifie que si Φ est une telle application, il existe un ouvert U de ∂W dépendant de Φ , tel que : $\Phi|_U = \Phi_0|_U$). Cet espace est muni de la topologie C^r .

Le théorème de Morse [8] a pour conséquence que l'ensemble des applications de $C_r(W, V, [\Phi_0]_{|\partial W})$, vérifiant la condition i) de la définition ci-dessus, est un ouvert dense de $C_r(W, V, [\Phi_0]_{|\partial W})$. Comme W est compacte, de telles applications ne possèdent qu'un nombre fini de points critiques par rapport à \mathfrak{F} ; on peut mettre ces points sur des feuilles distinctes par des perturbations arbitrairement petites. On a donc le résultat suivant :

PROPOSITION 1. — *L'ensemble des applications de $C_r(W, V, [\Phi_0]_{|\partial W})$ en position générale par rapport à \mathfrak{F} est dense dans $C_r(W, V, [\Phi_0]_{|\partial W})$ (avec $r \geq 2$).*

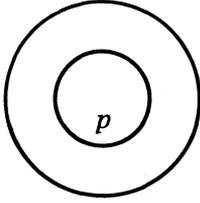
Supposons maintenant que Φ_0 soit un plongement de W dans V , transverse à \mathfrak{F} dans un voisinage de ∂W , si $\partial W \neq 0$. Désignons par $Pl_r(W, V, [\Phi_0]_{|\partial W})$ l'espace des plongements de W dans V , ayant même germe que Φ_0 le long de ∂W , muni de la topologie C^r , $r \geq 2$. C'est un sous-espace ouvert de $C_r(W, V, [\Phi_0]_{|\partial W})$. La proposition 1 a donc pour conséquence :

PROPOSITION 2. — *L'ensemble des plongements de $Pl_r(W, V, [\Phi_0]_{|\partial W})$ en position générale par rapport à \mathfrak{F} est dense dans $Pl_r(W, V, [\Phi_0]_{|\partial W})$ (avec $r \geq 2$).*

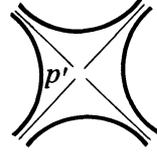
Pour illustrer ce qui précède, supposons que W soit de dimension 2. Dans ce cas, ∂W est une réunion de copies de S^1 , si ce bord n'est pas vide. Si Φ est un plongement de W dans V en position générale par rapport à \mathfrak{F} , on désignera par g , le feuilletage avec singularités image réciproque de \mathfrak{F} par Φ . Si $x \in \Phi^{-1}(U_i)$ est un point de contact de Φ avec \mathfrak{F} , dont l'image est située dans l'ouvert U_i , d'application distinguée φ_i , il existe une carte locale (u, v) de W au voisinage de x , dans laquelle, d'après le lemme de Morse [8] :

$$\varphi_i \circ \Phi(u, v) = \pm u^2 \pm v^2 .$$

La fonction distinguée φ_i n'ayant de sens qu'au signe près, il existe deux types de contact représentés ci-après :

Centre p

$$\varphi_i \circ \Phi = \pm (u^2 + v^2)$$

Point de selle p'

$$\varphi_i \circ \Phi = \pm (u^2 - v^2)$$

Les orbites issues d'un point de selle p' sont appelées : séparatrices de p' .

Le nombre n_1 de centres et le nombre n_2 de points de selle sont reliés par la relation de Morse suivante, lorsque g est transverse ou bien tangent à ∂W : $\chi(W) = n_1 - n_2$, où $\chi(W)$ désigne la caractéristique d'Euler de W .

Il en résulte que le nombre minimal de points de contact est égal dans l'absolu à $|\chi(W)|$. Ce nombre est atteint si, et seulement si, tous les points de contact sont d'un même type.

B. Le théorème fondamental pour les feuilletages sans cycle limite.

V et W étant les variétés définies plus haut, on suppose que V est munie d'un feuilletage de codimension 1. Dans ce paragraphe et les suivants, on supposera \mathcal{F} transversalement orientable, de classe supérieure ou égale à 2, et *sans cycle limite* au sens de Novikov. On s'intéressera surtout à deux types particuliers de tels feuilletages :

a) \mathcal{F} est un feuilletage dont toutes les feuilles sont simplement connexes.

b) \mathcal{F} est le feuilletage défini de la façon suivante : on considère une variété V compacte, de dimension 3, munie d'un feuilletage $\tilde{\mathcal{F}}$ de codimension 1 et transversalement orientable. Ce feuilletage possède un nombre fini, éventuellement nul, de composantes de Reeb, dont la réunion est notée par τ . Supposons que $V - \tau$ ne soit pas vide. On définit \mathcal{F} comme restriction de $\tilde{\mathcal{F}}$ à $V - \tau$. Le théorème II.A.3 a pour

conséquence que le feuilletage \mathcal{F} ne possède pas de cycle limite au sens de Novikov.

Pour les feuilletages sans cycle limite, on a le résultat suivant :

THEOREME. — *Soit \mathcal{F} un feuilletage de codimension 1, transversalement orientable, sans cycle limite au sens de Novikov et de classe $r \geq 2$, d'une variété V . Soit p un point quelconque de V , L la feuille de \mathcal{F} par le point p . Alors l'homomorphisme suivant est injectif :*

$$\varphi_{\#} : \pi_1(L, p) \rightarrow \pi_1(V, p)$$

où φ désigne l'inclusion de L dans V .

Le théorème ci-dessus suggère les quelques commentaires suivants :

Supposons par exemple que $V = T^3$, le tore de dimension 3, et que \mathcal{F} soit un feuilletage de V sans cycle limite, comme ci-dessus. La classification des variétés de dimension 2, a comme conséquence que les feuilles de \mathcal{F} sont homéomorphes à \mathbf{R}^2 , $S^1 \times \mathbf{R}$ ou bien à $S^1 \times S^1$. (En effet, le théorème implique que le groupe fondamental de chaque feuille est un sous-groupe de $\mathbf{Z} \oplus \mathbf{Z} \oplus \mathbf{Z}$). Les feuilles ont donc le type topologique d'orbites d'actions de \mathbf{R}^2 non dégénérées. On verra au chapitre IV, que si toutes les feuilles sont homéomorphes à \mathbf{R}^2 , le feuilletage \mathcal{F} est conjugué au feuilletage défini par une action de \mathbf{R}^2 . De ce qui précède, on peut donc conjecturer que tout feuilletage de T^3 , sans cycle limite, transversalement orientable et de classe 2 au moins, est conjugué à un feuilletage défini par une action \mathbf{R}^2 non dégénérée.

La démonstration ci-dessous reprend en l'approfondissant un raisonnement dû à A. Haefliger (prop. 4.2 de [3]). Nous avons pensé qu'il était bon de donner cette démonstration en détail car elle utilise une méthode capitale dans l'étude des feuilletages des variétés de dimension 3, consistant à considérer l'image réciproque du feuilletage sur une variété de dimension 2. Cette démonstration est d'autre part un bon exemple d'utilisation des lemmes de stabilité de la partie II, et, en particulier du lemme II.A.3.

Démonstration. — Soit p un point quelconque, L la feuille par p , φ l'inclusion de L dans V . Supposons que $\varphi_{\#}$ ne soit pas injectif : dans ce cas, il existe un élément μ de $\pi_1(L, p)$, tel que $\mu \neq 0$ dans

$\pi_1(L, p)$ et que $\varphi_{\#}(\mu) = 0$ dans $\pi_1(V, p)$. La classe μ peut être représentée par une immersion différentiable f de S^1 dans L , telle que $p \in f(S^1)$.

Considérons S^1 comme le bord du disque D^2 . Comme $\varphi_{\#}(\mu) = 0$ et que \mathcal{F} est transversalement orientable, on peut prolonger f en une application différentiable F_0 de D^2 dans V , transverse à \mathcal{F} dans un voisinage de ∂D^2 . Grâce à la proposition A.1, on peut approcher F_0 par une application différentiable F de D^2 dans V , telle que :

- i) $F|_{\partial D^2} = f$.
- ii) F soit transverse à \mathcal{F} dans un voisinage de ∂D^2 .
- iii) F soit en position générale par rapport à \mathcal{F} .

Désignons par g le feuilletage avec singularités défini par l'image réciproque de \mathcal{F} sur D^2 . Comme \mathcal{F} est transversalement orientable, il existe un champ X tangent à g et s'annulant uniquement aux points singuliers de g , (voir la proposition 4.2 de [3]) ; g n'a qu'un nombre fini de singularités, centres et points de selle. On appellera cycles de g , soit les orbites fermées de g homéomorphes à S^1 , soit les ensembles formés d'un point de selle et d'une séparatrice partant de ce point de selle et y revenant, si une telle situation se présente. Le bord de D^2 que l'on notera par l_0 est un cycle. Si l est un cycle, $F(l)$ est un lacet contenu dans une certaine feuille $L(l)$ de \mathcal{F} . Désignons par K l'ensemble des cycles l tels que $F(l)$ ne soit pas homotope à zéro sur $L(l)$. K n'est pas vide, car $l_0 \in K$ par hypothèse.

Chaque cycle l borde un disque unique $D(l)$ dans D^2 . On peut introduire une relation d'ordre partiel dans l'ensemble des cycles par :

$$l \leq l' \Leftrightarrow D(l) \subseteq D(l') .$$

Nous allons démontrer que K , muni de cet ordre, est un ensemble inductif décroissant. Soit $\{l_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ une famille totalement ordonnée et décroissante d'éléments de K ($i < j \Rightarrow l_i > l_j$).

$$\text{Soit } H = \bigcap_{i \in \mathbb{N}} D(l_i) .$$

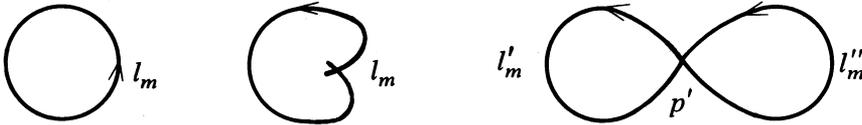
H est un ensemble compact, invariant par X et non vide.

Désignons par ∂H la frontière de l'ensemble H :

$$\partial H = H - \text{int } H .$$

Remarquons que ∂H ne peut pas contenir de centre. En effet, si $x \in \partial H$, il existe une suite $\{x_i\}_{i \in \mathbb{N}}$, avec $x_i \in l_i$ pour tout $i \in \mathbb{N}$, telle que x soit point d'accumulation de la suite $\{x_i\}$. Or, les orbites de X au voisinage des centres sont homotopes à zéro sur leur feuille, comme étant contenues dans un voisinage distingué. Il en résulte que ∂H est une réunion de cycles. D'autre part, H étant défini comme intersection dénombrable de sous-ensembles compacts et connexes d'un espace localement compact, il est facile de montrer que H est connexe. Trois cas sont donc seulement possibles :

- i) ∂H est une orbite fermée l_m .
- ii) ∂H est un cycle l_m portant un point de selle.
- iii) ∂H est la réunion de deux cycles l'_m et l''_m ayant un point de selle p' en commun. (figure en forme de huit).



Ces trois cas sont illustrés par le schéma ci-dessus. H est égal soit à $D(l_m)$, soit à $D(l'_m) \cup D(l''_m)$ et les cycles l_i convergent vers ∂H dans la région extérieure à H . Nous allons montrer que soit l_m , soit l'un des deux cycles l'_m ou l''_m appartient à K .

Supposons tout d'abord que l'holonomie de \mathcal{F} , au-dessus du lacet $F(l_m)$ ou bien au-dessus de $F(l'_m)$ suivi de $F(l''_m)$ décrits dans le sens indiqué sur le schéma, soit non triviale. Il résulte alors des considérations développées dans la partie II que $F(l_m)$ ou bien $F(l'_m) \cup F(l''_m)$ est non homotope à zéro sur sa feuille : cela entraîne que l_m ou bien l'un des deux cycles l'_m ou l''_m appartient à K . Supposons maintenant que l'holonomie de \mathcal{F} , au-dessus du lacet $F(l_m)$ ou bien du lacet $F(l'_m) \cup F(l''_m)$, soit triviale. Il en résulte que toutes les orbites de X dans un voisinage de ∂H et à l'extérieur de H sont homéomorphes à S^1 . On peut alors construire une application

$$\varphi : [0, 1] \times S^1 \rightarrow D^2 - \text{int } H,$$

telle que :

i) $\varphi_t(S^1)$ soit un cycle de X pour tout $t \in [0, 1]$.

ii) $\varphi_0(S^1) = l_m$ ou bien $\varphi_0(S^1) = l'_m \cup l''_m$.

Si $\varphi_0(S^1)$ était homotope à zéro sur sa feuille la composition $F \circ \varphi$ serait une application de $[0, 1] \times S^1$ dans V répondant aux conditions du lemme II.A.3. Donc pour t suffisamment petit, $\varphi_t(S^1)$ n'appartiendrait pas à K .

Mais ceci est en contradiction avec le fait que la suite $\{l_i\}$ converge vers ∂H , ce qui signifie qu'il existe une suite $\{t_i\} \rightarrow 0$ avec $\varphi_{t_i}(S^1) = l_i$ pour i suffisamment grand. Donc, comme dans le cas précédent l_m ou bien l'un des deux cycles l'_m ou l''_m appartient à K qui est un ensemble inductif.

Soit l un élément minimal de K . Il peut arriver que l contienne un point de selle p' et que la séparatrice de p' , n'appartenant pas à l , forme avec p' un second cycle l' contenu dans $D(l)$. Puisque l est minimal, l' n'appartient pas à K et $F(l)$ suivi de $F(l')$ est un lacet non homotope à zéro sur sa feuille. Désignons par D , la différence $D(l) - \text{int } D(l')$ dans ce cas particulier, ou bien le disque $D(l)$ dans les autres cas. Les orbites de X contenues dans D , et situées au voisinage de l ou de $l \cup l'$ suivant le cas, sont homéomorphes à S^1 . Sinon D contiendrait une infinité d'orbites homéomorphes à \mathbb{R} . Un nombre fini de ces orbites pourraient être séparatrices de points de selle. Les autres orbites homéomorphes à \mathbb{R} admettraient chacune, outre l ou bien $l \cup l'$ éventuellement, un ensemble limite contenu dans l'intérieur de D . D'après la théorie de Poincaré-Bendixson [4], cet ensemble limite serait soit un cycle k , soit la réunion de deux cycles k' et k'' ayant un point de selle en commun. Un raisonnement déjà utilisé plus haut montre que k ou l'un des deux cycles k' ou k'' appartiendrait à K , ce qui serait en contradiction avec la minimalité de l .

Puisque toutes les orbites de X dans D au voisinage de l ou bien de $l \cup l'$ sont fermées, on peut construire une application

$$\varphi : [0, 1] \times S^1 \rightarrow D$$

telle que :

i) $\varphi_t(S^1)$ est un cycle de X .

ii) $\varphi_0(S^1) = l$ ou bien $l \cup l'$.

iii) Les segments $t \rightarrow \varphi_t(x)$ pour $x \in S^1$ sont transverses aux cycles $\varphi_t(S^1)$.

Il en résulte que $F \circ \varphi$ est un cycle limite au sens de Novikov puisque par minimalité de $l \in K$ et $\varphi_t(S^1) \notin K$ pour $t > 0$.

Mais ceci contredit l'hypothèse. Donc, il n'existe pas de classe telle que μ et $\varphi_{\#}$ est injectif. ■

Soit (\tilde{V}, π) un revêtement de V ; l'espace total \tilde{V} et l'application du revêtement π sont supposés différentiables. Supposons que V soit munie d'un feuilletage \mathfrak{F} . On peut relever \mathfrak{F} en un feuilletage $\tilde{\mathfrak{F}}$ de \tilde{V} de la façon suivante :

On choisit un recouvrement $\{U_i\}$ de V par des ouverts étant à la fois ouverts distingués de \mathfrak{F} et bons ouverts pour le revêtement. Soient φ_i leurs applications distinguées. $\tilde{\mathfrak{F}}$ est le feuilletage ayant pour ouverts distingués les composantes connexes des ouverts $\pi^{-1}(U_i)$ et pour applications distinguées les fonctions $\varphi_i \circ \pi$. Chaque feuille \tilde{l} de $\tilde{\mathfrak{F}}$ se projette sur une feuille l de \mathfrak{F} , et $(\tilde{l}, \tilde{\pi}|_{\tilde{l}})$ forme un revêtement de l . Ceci étant, on peut traduire le théorème sous la forme suivante :

COROLLAIRE 1. — *Supposons qu'une variété V possède un feuilletage \mathfrak{F} de codimension un, de classe C^2 au moins, transversalement orientable et sans cycle limite. Soit $\tilde{\mathfrak{F}}$ le feuilletage induit par \mathfrak{F} sur le revêtement universel différentiable de V , noté (\tilde{V}, π) . Alors chaque feuille \tilde{l} de $\tilde{\mathfrak{F}}$, est revêtement universel d'une feuille l de \mathfrak{F} , pour l'application π restreinte à \tilde{l} .*

Démonstration. — Soit $\tilde{p}_0 \in \tilde{l}$. Notons $p_0 = \pi(\tilde{p}_0)$ et par l la feuille de \mathfrak{F} par p_0 . Considérons le diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccc} \pi_1(\tilde{l}, \tilde{p}_0) & \xrightarrow{i_{\#}} & \pi_1(\tilde{V}, \tilde{p}_0) \\ \downarrow \pi|_{i_{\#}} & & \downarrow \pi_{\#} \\ \pi_1(l, p_0) & \xrightarrow{j_{\#}} & \pi_1(V, p_0) \end{array}$$

Les flèches horizontales sont induites par les inclusions i et j de \tilde{l} et de l dans \tilde{V} et V respectivement. Ce diagramme est commutatif. Comme $\pi_1(\tilde{V}, \tilde{p}_0) = \{0\}$, on a :

$$j_{\#} \circ \pi|_{i_{\#}} = 0$$

D'autre part, on sait que $j_{\#}$ est injectif par le théorème et que $\pi|_{\tilde{l}_{\#}}$ est injectif, car $(\tilde{l}, \pi|_{\tilde{l}})$ est revêtement de l . Donc, $\pi_1(\tilde{l}, \tilde{p}_0) = 0$ et $(\tilde{l}, \pi|_{\tilde{l}})$ est revêtement universel de l . ■

Supposons, en particulier, que V soit de dimension égale à trois. La classification des variétés de dimension deux permet d'affirmer que les feuilles de $\tilde{\mathcal{F}}$ sont difféomorphes à S^2 ou bien à R^2 . Supposons de plus que V soit compacte et orientable et qu'une au moins des feuilles de $\tilde{\mathcal{F}}$ soit difféomorphe à S^2 . On suppose de plus que si $\partial V \neq \emptyset$, les composantes connexes de ∂V sont feuilles de \mathcal{F} . L'hypothèse entraîne qu'une feuille de \mathcal{F} est difféomorphe à S^2 et le théorème de stabilité globale II.A.1., permet d'affirmer qu'en fait toutes les feuilles de \mathcal{F} sont difféomorphes à S^2 . L'espace quotient de V par la relation d'équivalence définie par \mathcal{F} étant une variété de dimension 1, on a le résultat suivant :

COROLLAIRE 2. — *Soit V une variété compacte de dimension 3, admettant un feuilletage \mathcal{F} , de codimension 1 transversalement orientable, de classe plus que 2, et sans cycle limite (\tilde{V}, π) désignant le revêtement universel de V , et $\tilde{\mathcal{F}}$ le feuilletage induit par \mathcal{F} sur \tilde{V} , on a les deux possibilités suivantes :*

i) V est difféomorphe à $(S^2$ ou $P^2) \times [0, 1]$ ou bien un fibré sur S^1 de fibre S^2 ou P^2 et \mathcal{F} est le feuilletage induit par la fibration sur $[0, 1]$ ou S^1 définissant V (\tilde{V} est alors difféomorphe à $S^2 \times [0, 1]$ ou bien à $S^2 \times R$) ; P^2 désigne le projectif réel de dimension 2.

ii) $\tilde{\mathcal{F}}$ est un feuilletage par plans R^2 .

Démonstration. — Si V est orientable le corollaire résulte des considérations précédant son énoncé. Il en est de même si V n'est pas orientable, et qu'aucune feuille de \mathcal{F} n'est homéomorphe à P^2 . Supposons que \mathcal{F} possède une feuille L difféomorphe à P^2 ; V est alors nécessairement non orientable puisque \mathcal{F} est transversalement orientable. Soit (V', π') le revêtement orientable de V à deux feuillets et soit \mathcal{F}' le feuilletage induit par \mathcal{F} sur V' . \mathcal{F}' est transversalement orientable à l'égal de \mathcal{F} . Soit L' une feuille de \mathcal{F}' telle que $\pi'(L') = L$; (L', π') est un revêtement orientable de $L \approx P^2$; Donc $L' \approx S^2$. Il résulte alors du théorème II.A.1. que toutes les feuilles de \mathcal{F}' sont difféomorphes à S^2 . Donc, les feuilles de \mathcal{F} sont difféomorphes à S^2 ou bien à P^2 . Mais, si une feuille de \mathcal{F} est difféomorphe à S^2 , toutes

les feuilles sont aussi difféomorphes à S^2 toujours d'après le théorème II.A.1. Comme $L \approx P^2$, toutes les feuilles de \mathcal{F} sont donc difféomorphes à P^2 . \mathcal{F} étant transversalement orientable, à feuille compacte, l'espace quotient de V par \mathcal{F} est une variété de dimension 1 ce qui achève la démonstration. ■

C. Théorème de Schönflies pour les variétés feuilletées.

DEFINITION. — Une variété différentiable V de dimension n est dite irréductible si toute sphère différentiable de dimension $n - 1$ plongée dans V est bord d'un disque différentiable de dimension n plongé dans V .

Le théorème de Schönflies classique affirme que R^n est irréductible pour $n \leq 3$. Le théorème n'est pas connu pour R^4 et il résulte du théorème du h -cobordisme pour R^n , $n \geq 5$. Le résultat suivant, dont nous ferons un grand usage par la suite, a été démontré par H. Rosenberg. Il se présente comme une généralisation du théorème de Schönflies. On en trouvera une démonstration détaillée dans l'appendice de [17]. Cette démonstration utilise le lemme de stabilité I.A.2. ainsi qu'une méthode de réduction du nombre des points de contact d'une sphère mise en position générale par rapport au feuilletage. Un argument analogue sera développé ci-dessous dans la démonstration du lemme D.2.

THEOREME 1. — Soit V une variété de dimension 3, compacte ou non, munie d'un feuilletage par plans R^2 , transversalement orientable, et de classe C^2 au moins. Alors V est irréductible. ■

Le corollaire B.2. va permettre d'étendre ce résultat à tous les feuilletages sans cycle limite :

THEOREME 2. DE SCHONFLIES POUR LES VARIETES FEUILLETEES. — Soit V une variété de dimension 3, munie d'un feuilletage \mathcal{F} , de codimension 1, transversalement orientable, de classe C^2 au moins, sans cycle limite et dont aucune feuille n'est homéomorphe à S^2 ou à P^2 . Alors V est irréductible. ■

Démonstration du théorème 2. — Si $\partial V \neq \emptyset$ ou bien si V est non compacte, on considère la variété $V_1 = \text{int } V$. Son revêtement universel \tilde{V}_1 est une variété non compacte munie d'un feuilletage par plans \mathbb{R}^2 d'après le corollaire 1. Si maintenant $\partial V = \emptyset$ et que V est compacte ; le groupe fondamental de V ne peut être fini car un argument de Novikov [9], analogue à celui utilisé dans la démonstration du théorème B, prouve que dans ce cas \mathcal{F} possède des cycles limites. Donc \tilde{V} est non compacte et \mathcal{F} est un feuilletage par plans d'après le corollaire B.2. Le théorème 2 découle donc du lemme suivant :

LEMME. — *Si une variété V , de dimension $n > 2$, possède un revêtement (\tilde{V}, π) d'espace total non compact et irréductible, alors V est irréductible.*

Démonstration du lemme. — Soit S une sphère de dimension $n - 1$ différenciablement plongée dans V . Puisque S est simplement connexe, il existe une sphère S_1 de dimension $n - 1$, différenciablement plongée dans \tilde{V} et telle que $\pi(S_1) = S$. Par hypothèse, il existe un disque D de dimension n dans \tilde{V} , dont le bord est S_1 . Pour montrer que π est injectif sur D , il suffit de prouver que $g(D) \cap D = \emptyset$ pour tout élément non trivial g du groupe des transformations du revêtement. Si $g(D) \cap D \neq \emptyset$ pour un certain g , alors $g(D) \subset D$ ou bien $D \subset g(D)$ puisque π est injectif sur S_1 et que \tilde{V} est non compact. Ainsi, g a un point fixe ce qui implique que g est égal à l'identité. Il en résulte que S borde la boule $\pi(D)$. ■

Un cas intéressant d'application du théorème 2 est celui du complémentaire de la réunion τ des composantes de Reeb d'un feuilletage, dans le cas où τ et $V - \tau$ ne sont pas vides. D'après le corollaire B.2., aucune feuille n'est difféomorphe à S^2 ou à P^2 dans ce cas, et on peut appliquer le théorème 2. Chaque composante de Reeb est trivialement irréductible. On a donc une décomposition de V en parties irréductibles en écrivant :

$$V = (V - \tau) \cup \tau$$

D. Elimination de points de contact de plongements.

Dire qu'une variété V est irréductible signifie encore, si V est de dimension 3, que tout plongement différentiable de S^2 dans V

est isotope à un plongement dans un ouvert distingué du feuilletage. Dans cet ouvert distingué, le plongement est isotope à un plongement n'ayant que deux points de contact avec le feuilletage, d'après le théorème classique de Schonflies. Autrement dit, on peut énoncer le théorème C.2. sous la forme suivante :

Si Φ_0 est un plongement de S^2 dans V munie d'un feuilletage \mathcal{F} comme dans le théorème C.2, il existe un plongement Φ , isotope à Φ_0 n'ayant que deux points de contact avec \mathcal{F} , c'est-à-dire le minimum possible car $|\chi(S^2)| = 2$.

Nous allons maintenant nous consacrer à des généralisations de ce résultat pour les plongements d'une variété $W \neq S^2$, compacte orientable, de dimension 2, de classe 2 au moins ; V sera comme plus haut, une variété de dimension 3, munie d'un feuilletage \mathcal{F} de codimension 1, de classe 2 au moins, transversalement orientable et sans cycle limite.

Soit Φ_0 un plongement de W dans V , de classe 2 au moins et tel que Φ_0 restreint à ∂W soit transverse à \mathcal{F} , si $\partial W \neq \emptyset$. La proposition A.2. permet de trouver des plongements Φ en position générale aussi proches que voulu de Φ_0 dans $PL_r(W, V, [\Phi_0]_{\partial W})$ et donc isotopes à Φ_0 . Chacun de ces plongements a un nombre fini de points de contact avec \mathcal{F} .

On peut se poser le problème suivant : étant donné Φ_0 , quel est le nombre de points de contact minimum que peuvent atteindre des plongements isotopes à Φ_0 ?

Nous répondrons à cette question pour certains types de plongements dans les variétés feuilletées par plans. Auparavant, nous allons examiner dans quelle mesure, on peut réduire le nombre des points de contact d'un plongement en position générale, en modifiant le plongement par isotopie.

Soit Φ un plongement de W en position générale par rapport à \mathcal{F} . Comme plus haut, nous désignerons par g le feuilletage avec singularités, image réciproque de \mathcal{F} par Φ , et par X un champ tangent à g . X est un champ avec un nombre fini de zéros, tout centre ou point de selle. Pour un tel champ, nous avons le résultat suivant sur les orbites, démontré dans [16] (lemme 2.6. de [16]) :

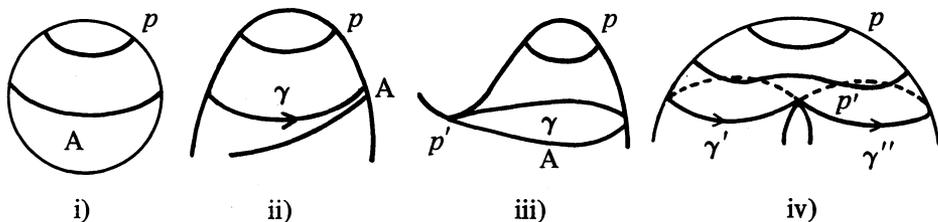
LEMME 1. — *Soit W une variété fermée de dimension 2, et soit*

X un champ de vecteurs sur W de classe C^2 au moins, dont chaque zéro est un centre ou un point de selle, et tel qu'il n'y ait pas d'orbite joignant deux points de selle distincts. Soit p un centre de X et H l'ensemble des disques E de dimension 2, plongés dans W , de façon que $p \in E$, ∂E soit une orbite de X et que toutes les orbites dans E autres que p soient des courbes simples :

Alors $A = \partial(\overline{\cup\{E \mid E \in H\}})$ est, soit un centre de X , soit un cycle (au sens du théorème B.1), soit la réunion de deux cycles ayant en commun un point de selle.

On peut distinguer ainsi quatre cas :

- i) A est un centre de X , auquel cas $W = S^2$.
- ii) A est une orbite γ homéomorphe à S^1 . Dans ce cas et à cause de la maximalité de cette orbite, il existe des orbites de X homéomorphes à R passant par des points aussi proches que voulu de A .
- iii) A est la réunion d'un point de selle p' et d'une séparatrice γ de p' partant de p' et y revenant.
- iv) A est la réunion d'un point de selle p' et des deux séparatrices γ' et γ'' de p' formant une figure en forme de huit.



Remarque. — Le lemme 1 est encore valable pour les variétés W compactes, à bord non vide et les champs X transverses à ∂W ou bien tangents à ∂W . Il suffit de définir un champ \tilde{X} sur le double \tilde{W} de W , prolongeant le champ X . On applique ensuite le lemme à \tilde{W} . Le cas i) ne peut évidemment pas se présenter. Dans le cas ii), on peut avoir $W = D^2$ et $A = \partial D^2$.

Revenons au champ X associé au plongement Φ . L'hypothèse $W \neq S^2$ interdit le cas i). La courbe γ dans les cas ii) et iii) ou la succession des courbes γ' et γ'' dans le cas iv), orientées comme sur la figure ci-dessus, est homotope à zéro sur W .

Comme \mathcal{F} ne possède pas de cycle limite, l'image de cette courbe par Φ est homotope à zéro sur sa feuille, d'après le théorème B. Ceci interdit le cas ii) puisque dans ce cas, $\Phi(A)$ est un lacet d'une feuille de \mathcal{F} d'holonomie non triviale. Donc seuls sont possibles les cas iii) et iv).

Nous appellerons bon couple de points critiques, le couple formé par un centre p et un point de selle p' , associés comme dans le cas iii). L'intérêt de cette notion apparaît dans le résultat suivant :

THEOREME. — *Soit V une variété de dimension 3, admettant un feuilletage \mathcal{F} , de codimension 1, transversalement orientable, de classe 2 au moins, sans cycle limite ni feuille homéomorphe à S^2 . Soit $W \neq S^2$ une variété de dimension 2, compacte orientable de classe 2 au moins et Φ_0 un plongement de W dans V , de classe 2 au moins, tel que $\Phi_0|_{\partial W}$ soit transverse à \mathcal{F} si $\partial W \neq \emptyset$. Supposons que : $\Phi_{0\#} : \pi_1(W) \rightarrow \pi_1(V)$ soit un homomorphisme injectif. Alors, il existe un plongement Φ , isotope à Φ_0 dans $PL_r(W, V, [\Phi_0]_{|\partial W})$ avec $r \geq 2$, tel que Φ soit un plongement en position générale par rapport à \mathcal{F} et ne possédant aucun bon couple de points de contact avec \mathcal{F} .*

Démonstration du théorème. — Soit Φ un plongement isotope à Φ_0 . Si le nombre de points de contact de Φ avec \mathcal{F} est minimum, c'est-à-dire égal à $|\chi(W)|$, tous les points de contact éventuels sont de même type et il n'existe pas de bon couple pour Φ . Le théorème résulte donc du résultat suivant, corollaire du théorème de Schonflies (C.2) :

LEMME 2. — *Dans les hypothèses du théorème, si Φ est un plongement de W isotope à Φ_0 dans $PL_r(W, V, [\Phi_0]_{|\partial W})$ et possédant un bon couple de points de contact, il existe un plongement Φ' isotope à Φ dans $PL_r(W, V, [\Phi_0]_{|\partial W})$ avec strictement moins de points de contact avec \mathcal{F} que Φ .*

Démonstration du lemme 2. — Soit (p, p') un bon couple de points de contact de Φ . Avec les notations du lemme 1, $A = p' \cup \gamma$, où γ est la séparatrice associée à p' ; A est un cycle dont l'image est homotope à zéro sur sa feuille que nous noterons Lp' ; $\Phi(A)$ borde un disque unique D sur Lp' (puisque $Lp' \neq S^2$) ; A borde aussi un

disque unique E sur W (puisque $W \neq S^2$). Considérons les séparatrices issues de p' , différentes de γ ; leur image par Φ peut être contenue dans D . Dans ce cas, la séparatrice γ' issue de p' revient en p' et forme avec p' un cycle noté A' dont l'image par Φ est contenue dans D ; $\Phi(A')$ borde un disque D' sur Lp' contenu dans D et A' borde un disque unique E' sur W . Dorénavant, nous noterons par D_1, E_1, A_1 soit :

– D, E, A , si les séparatrices de p' autre que γ ne sont pas contenues dans D , soit :

– D', E', A' , dans le cas contraire.

Notons que $p' \in A_1$. Nous allons maintenant éliminer par des isotopies le point de contact p' et un centre au moins. $\Phi(W) \cap D_1$ est formé de la courbe $\Phi(A_1)$ notée C_1 et éventuellement d'autres courbes toutes difféomorphes à S^1 , car p' est l'unique point de contact sur la feuille Lp' .

Nous allons étudier successivement les deux situations suivantes :

a) $\Phi(W) \cap D_1 = C_1$.

Dans ce cas, $\Phi(E_1) \cup D_1$ est une sphère anguleuse de V qui d'après le théorème C.2. est le bord d'une boule anguleuse B_1 plongée dans V .

Remarquons que $\Phi(W - E_1) \subset V - B_1$. Sinon $\Phi(W)$ serait inclus dans B_1 et $\Phi_\#$ ne pourrait être un homomorphisme injectif (l'hypothèse $W \neq S^2$ entraînant que $\pi_1(W)$ n'est pas trivial). D'autre part, l'holonomie au-dessus du chemin $\Phi(A_1) = C_1$ étant triviale, les orbites de X contenues dans E_1 au voisinage de A_1 sont homéomorphes à S^1 .

Il résulte alors du lemme de stabilité II.A.2. qu'il existe une application $F : [0, 1] \times D^2 \rightarrow V$ telle que :

i) $F(\{0\} \times D^2) = D_1$ et $F(\{t\} \times D^2)$ pour $t \in [0, 1]$ soit un disque dans une feuille notée L_t . Le bord de ce disque est l'image par Φ d'une orbite γ_t de X au voisinage de $A_1 = \gamma_0$ dans E_1 .

ii) F soit un plongement différentiable, sauf au point $F^{-1} \circ \Phi(p')$.

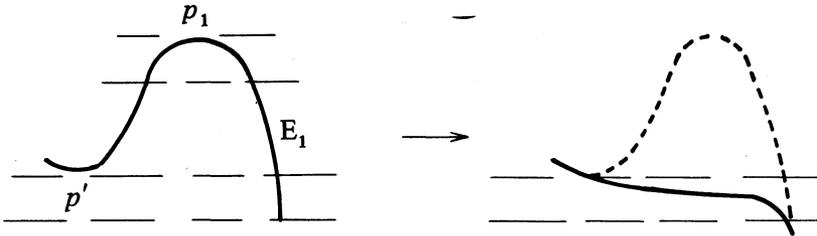
iii) Les intérieurs des disques $F(\{t\} \times D^2)$ soient disjoints de $\Phi(W)$.

Comme $\Phi(W - E_1) \subset V - B_1$ et en raison de la condition iii), F a une image contenue dans B_1 .

Soit E' un disque plongé dans $F([1/2, 1] \times D^2)$, tel que : $\partial E' = \Phi(\gamma_{1/2})$ et que E' se raccorde différentiablement à : $\Phi(W - E_{1/2})$

où $E_{1/2}$ est le disque de W bordé par $\gamma_{1/2}$. On suppose de plus que E' ne porte qu'un point de contact avec \mathcal{F} : un centre p_1 situé dans le disque $F(\{1\} \times D^2)$. Le disque $\Phi(E_{1/2})$ est isotope au disque E' à travers la boule B_1 . Il en résulte que Φ est isotope à un plongement Φ_1 de W coïncidant avec Φ sur $W - E_{1/2}$ et envoyant $E_{1/2}$ sur E' . Cette isotopie n'a pas augmenté le nombre de points de contact avec \mathcal{F} puisque Φ_1 n'a qu'un point de contact sur $E_{1/2}$.

Maintenant, par une nouvelle isotopie, on peut éliminer les deux points critiques p_1 et p' sans en introduire de nouveaux. Cette isotopie, n'agissant que dans un voisinage arbitraire de E_1 sur W est représentée par le schéma ci-dessous :



L'étape finale est le plongement Φ' cherché.

b) Supposons maintenant que $\Phi(W) \cap D_1 = C_1 \cup C_2 \dots \cup C_k$ avec $k \geq 2$, où C_2, \dots, C_k sont des cercles contenus dans $\text{int } D_1$.

Nous allons montrer que, par une succession d'isotopies, ou bien on peut se ramener au cas a) sans augmenter le nombre des points de contact, ou bien diminuer strictement le nombre des points de contact (en éliminant le point p' entre autre).

Soient D_2, \dots, D_k les disques bordés par C_2, \dots, C_k dans $\text{int } D_1$. Supposons la numérotation choisie de façon que

$$D_2 \cap \Phi(W) = C_2 .$$

Alors, puisque C_2 est homotope à zéro dans V , $\Phi^{-1}(C_2)$ borde un disque unique E_2 dans W . La réunion $\Phi(E_2) \cup D_2$ borde une boule B_2 dans V d'après le théorème C.2.

Deux cas sont possibles :

b.1) $E_1 \subset E_2$. Alors le disque E_2 contenant le point p' porte au moins trois singularités et l'on peut trouver une isotopie de Φ à un plongement Φ' coïncidant avec Φ sur $W - E_2$ et tel que Φ' ne porte qu'une seule singularité sur E_2 . (On utilise le lemme de stabilité, comme plus haut). On a ainsi diminué strictement le nombre des points de contact.

b.2) $E_2 \subset E_1$ ou bien $E_2 \cap E_1 = \emptyset$. Dans ce cas, on peut trouver une isotopie de $\Phi(E_2)$ avec un disque E' ne portant qu'une singularité comme il est fait dans le paragraphe a), isotopie qui prolongée à W laisse C_1 fixe, puis par une nouvelle isotopie éliminer l'intersection C_2 , sans augmenter le nombre des points de contact. Ce qui achève la démonstration. ■

En considérant le cas particulier des feuilletages par plans, on obtient le corollaire suivant :

COROLLAIRE. — *Soit V une variété de dimension 3, admettant un feuilletage \mathcal{F} , dont toutes les feuilles sont homéomorphes à \mathbb{R}^2 , de classe C^2 au moins et transversalement orientable. Soit W une variété de dimension 2, compacte, orientable et de classe C^2 au moins, et Φ_0 un plongement de classe 2 au moins de W dans V , tel que $\Phi_0|_{\partial W}$ soit transverse à \mathcal{F} si $\partial W \neq \emptyset$. Supposons en outre que $\Phi_{0\#} : \pi_1(W) \rightarrow \pi_1(V)$ soit un homomorphisme injectif.*

Alors, il existe une isotopie de Φ_0 à un plongement Φ dans $PL_r(W, V, [\Phi_0|_{\partial W}])$, $r \geq 2$, tel que Φ soit en position générale par rapport à \mathcal{F} , avec un nombre de points de contact égal à $|\chi(W)|$, le minimum possible.

Démonstration. — Si $W = S^2$, ce résultat est une conséquence triviale du théorème C.2, comme on l'a remarqué au début de ce paragraphe. Supposons que $W \neq S^2$. Le théorème précédent fournit une isotopie de Φ_0 avec un plongement Φ en position générale par rapport à \mathcal{F} , ne possédant aucun bon couple. Nous allons voir, que dans l'hypothèse où \mathcal{F} est un feuilletage par plans, Φ ne possède aucun centre, ce qui entraîne que le nombre des points de contact est égal à $|\chi(W)|$. En effet, tous les centres éventuels de Φ sont du type iv) défini dans le lemme 1. Soit p l'un de ces centres, p' le point de selle associé à p , et γ', γ'' les séparatrices de p' . Désignons par c', c'' les courbes $p' \cup \gamma'$ et $p' \cup \gamma''$ et par E_1 le disque pincé réunion des disques E

intervenant dans le lemme 1. $\Phi(C')$ et $\Phi(C'')$ sont homotopes à zéro sur leur feuille qui est homéomorphe à \mathbb{R}^2 . Soit C'_1 et C''_1 deux trajectoires du champ X associé à Φ comme plus haut, proches de C' et C'' extérieures à E_1 et homéomorphes à S^1 ; C'_1 et C''_1 bordent dans W des disques notés D' et D'' . Considérons le champ X sur le disque D' par exemple. Le bord de D' est une orbite de X . Il est très facile de voir que le disque D' porte un bon couple, ou bien que D' ne porte qu'un seul centre p_1 , auquel cas (p_1, p) est un bon couple. Dans les deux cas, on arrive à une contradiction, puisque Φ est supposé ne pas posséder de bon couple de points de contact. Donc Φ ne possède pas de centre. Ce qui achève la démonstration. ■

PARTIE IV

LES FEUILLETAGES DE REEB

Dans cette partie, V désignera une variété compacte, de dimension 3, orientable, connexe, dont le bord est une réunion de tores de dimension 2. Rappelons qu'un feuilletage de Reeb \mathfrak{F} sur V est un feuilletage de classe C^2 au moins, transversalement orientable, dont les seules feuilles compactes sont les composantes éventuelles du bord de V et dont toutes les autres feuilles sont difféomorphes à \mathbf{R}^2 .

Le paragraphe A ci-dessous a pour objet la détermination des variétés possédant des feuilletages de Reeb et le paragraphe B contient des résultats relatifs aux classes de conjugaison de tels feuilletages.

A. Les variétés possédant des feuilletages de Reeb.

THEOREME. — *Si V admet un feuilletage de Reeb, alors V est difféomorphe à l'une des trois variétés suivantes :*

$$T^3 \simeq S^1 \times S^1 \times S^1, \quad D^2 \times S^1, \quad T^2 \times [0, 1] \quad (\text{où } T^2 \simeq S^1 \times S^1)$$

Démonstration. — Nous allons esquisser brièvement la démonstration de ce théorème dont on trouvera une démonstration complète dans [16]. Elle procède de la succession des lemmes suivants :

LEMME 1. — *Si $\partial V = \emptyset$ alors V est difféomorphe à T^3 . (Ce résultat a été établi par H. Rosenberg [15]).*

Nous supposons maintenant que $\partial V \neq \emptyset$ et nous désignons par T_i , $i \in [1, \dots, k]$, les composantes de ∂V qui sont toutes difféomorphes à T^2 par hypothèse.

LEMME 2. — *Supposons que $\partial V \neq \emptyset$ et qu'il existe i , $i \in [1, \dots, k]$, tel que $\pi_1(T_i) \xrightarrow{\varphi_i\#} \pi_1(V)$ ne soit pas injectif (où $\varphi_i : T_i \rightarrow V$ désigne l'inclusion de T_i dans V). Alors V est difféomorphe à $D^2 \times S^1$ et \mathfrak{F} est conjugué à la composante de Reeb.*

Démonstration. — Le “loop theorem” fournit une courbe simple fermée $\gamma \in T_i$, non homotope à zéro sur T_i et bordant un disque D de dimension 2, transverse à T_i le long de γ et plongé dans V . La proposition III.A.2. permet de supposer que ce disque est en position générale par rapport à \mathcal{F} . Le feuilletage \mathcal{F} induit sur D un feuilletage avec singularités, noté g ; les seules singularités de g sont des centres et des points de selle; de plus, g est formé des orbites d’un champ de vecteur X . Dans la démonstration du théorème III.C., nous avons montré que g contient des cycles limites au sens de Novikov. Ces cycles ne peuvent être contenus dans $\text{int } V$ qui est une variété feuilletée par plans. Le bord γ de D est donc l’unique cycle limite porté par D . Comme γ est un plongement, le théorème II.A.3. entraîne que T_i est le bord d’une composante de Reeb de \mathcal{F} . Il en résulte que $k = 1$ et que V est difféomorphe à $D^2 \times S^1$ et que \mathcal{F} est conjugué à la composante de Reeb. ■

LEMME 3. — *Supposons que pour $i, i \in [1, \dots, k]$,*

$$\pi_1(T_i) \xrightarrow{\varphi_{i\#}} \pi_1(V)$$

soit injectif; il existe alors un tore T'_i plongé dans $\text{int } V$, tel que T_i et T'_i bordent une sous-variété $E_i \simeq T_i \times [0, 1]$ plongée dans V , que \mathcal{F} soit transverse à T'_i et tel que, si g désigne le feuilletage induit par \mathcal{F} sur T'_i , g soit conjugué à un flot irrationnel de T'_i .

Démonstration. — Ce résultat est une conséquence immédiate du corollaire III.D. En effet, prenons $U \simeq T_i \times [0, 1]$ un voisinage collier de T_i dans V (avec T_i identifié avec $T_i \times \{0\}$ par exemple). Soit $T''_i = T_i \times \{1/2\}$.

D’après les hypothèses : $\pi_1(T''_i) \xrightarrow{\varphi''_{i\#}} \pi_1(V)$ est injectif, ($\varphi''_{i\#}$ désigne l’inclusion $T''_i \subset V$), et, de plus, $\chi(T''_i) = 0$. Il existe donc un tore T'_i isotope à T''_i dans $\text{int } V$, transverse à \mathcal{F} , et bordant avec T_i une sous-variété de V difféomorphe à $T_i \times [0, 1]$.

Comme \mathcal{F} a une holonomie triviale, les feuilles de g sont toutes homéomorphes soit à S^1 , soit à \mathbb{R} . La première éventualité est exclue car elle entraînerait l’existence d’éléments non triviaux dans le noyau de la flèche : $\pi_1(T'_i) \xrightarrow{\varphi'_{i\#}} \pi_1(V)$ et contredirait ainsi l’hypothèse. ($\pi_1(T_i) \xrightarrow{\varphi_{i\#}} \pi_1(V)$ ne serait pas injectif).

Donc, toutes les feuilles de g sont homéomorphes à \mathbf{R} ; g étant de classe C^2 au moins, comme \mathcal{F} , il résulte du théorème de Denjoy [2] que g est conjugué à un flot irrationnel. (Voir aussi [21]). ■

LEMME 4. — *Supposons que $\partial V \neq \emptyset$ et que V ne soit pas difféomorphe à $D^2 \times S^1$, alors $\pi_1(V)$ est isomorphe à Z^p avec $p \geq 2$.*

Démonstration. — Puisque $\partial V \neq \emptyset$ et que $V \neq D^2 \times S^1$, l'application $\pi_1(T_i) \xrightarrow{\varphi_{i\#}} \pi_1(V)$ est injective d'après le lemme 2, pour chaque composante T_i de ∂V . Soit T'_i , $i \in [1, \dots, k]$ des tores construits comme dans le lemme 3, de façon que les diverses sous-variétés E_i soient disjointes. Soit $W = V - \bigcup_i (\text{int } E_i \cup T_i)$; W est une variété difféomorphe à V telle que $\partial W = \bigcup_i T'_i$. \mathcal{F} induit un feuilletage sur W , dont les feuilles sont transverses à ∂W , d'intérieur homéomorphe à \mathbf{R}^2 . Notons \mathcal{F}' ce feuilletage. Il est d'holonomie triviale.

On peut trouver un flot continu n dans W , topologiquement transverse à \mathcal{F}' , tangent à ∂W et laissant invariant le feuilletage \mathcal{F}' , c'est-à-dire tel que :

$$n(\tau, Lx) \subset L_{n(\tau, x)} \quad \text{pour } \forall \tau \in \mathbf{R}$$

Ce résultat peut s'obtenir en construisant le double \tilde{W} de W de façon à obtenir un feuilletage différentiable $\tilde{\mathcal{F}}'$ sur \tilde{W} égal à \mathcal{F}' dans chaque copie du double, puis en modifiant le flot d'un champ \tilde{N}_0 du double, transverse à $\tilde{\mathcal{F}}'$ et tangent à $\partial W \subset \tilde{W}$, grâce au théorème 6 de Sacksteder [20] de façon à obtenir un flot \tilde{n} laissant $\tilde{\mathcal{F}}'$ invariant ; le flot \tilde{n} se restreint à W pour fournir le flot cherché.

Il est démontré dans [16] que lorsqu'il existe un tel flot n $\pi_1(W) \simeq \pi_1(V)$ est abélien libre et comme $\pi_1(V)$ contient les sous-groupes $\pi_1(T_i) \simeq Z^2$, il en résulte que $\pi_1(V)$ est isomorphe à Z^p avec $p \geq 2$. ■

Nous pouvons maintenant achever la démonstration du théorème. Plaçons-nous dans le cas où V n'est difféomorphe ni à T^3 , ni à $D^2 \times S^1$. V possède les propriétés suivantes :

- V est irréductible d'après le théorème II.C.1.
- $\pi_1(V) \simeq Z^p$ avec $p \geq 2$ d'après le lemme 4.

— ∂V a au moins deux composantes connexes : en effet, si ∂V est réduit à un seul tore T , un argument algébrique simple montre que $H_1(T, \mathbb{Z}) \xrightarrow{\varphi_*} H_1(V, \mathbb{Z})$ n'est pas injectif (cf. lemme 2.3 de [16]) et donc que $\pi_1(T) \xrightarrow{\varphi_{\#}} \pi_1(V)$ n'est pas non plus injectif, en raison de la propriété de $\pi_1(V)$ énoncée ci-dessus.

Le théorème de fibration de Stallings [22] entraîne alors que V est fibré sur S^1 : $V = A \times [0, 1]/(x, 0) \sim (f(x), 1)$ où A est une variété de dimension 2 et f un difféomorphisme de A .

Les conditions énoncées ci-dessus entraînent que $A = S^1 \times [0, 1]$ et que f est isotope à l'identité. Il en résulte alors que V est difféomorphe à $T^2 \times [0, 1]$. ■

Le théorème ci-dessus a les quelques conséquences suivantes :

COROLLAIRE 1. — *Soit V une variété de dimension 3, compacte, orientable, connexe, munie d'un feuilletage transversalement orientable dont les feuilles sont homéomorphes à T^2 ou \mathbb{R}^2 . Alors V est difféomorphe à l'une des variétés suivantes :*

1) *La somme de deux tores solides ($D^2 \times S^1$), identifiés par un difféomorphisme de leur bord.*

2) *Un fibré sur S^1 de fibre T^2 .*

3) $D^2 \times S^1$.

4) $T^2 \times [0, 1]$.

On trouvera une démonstration complète de ce corollaire dans [16]. L'idée de la démonstration est la suivante :

On peut trouver un ensemble fini de feuilles compactes T_1, \dots, T_k (ensemble éventuellement vide auquel cas on pose $k = 0$) tel que $V - \bigcup_i T_i$ soit connexe et tel que si T est une feuille compacte quelconque différente de T_1, \dots, T_k , alors $V - \bigcup_{i=1}^k T_i \cup T$ ne soit pas connexe. Compactifions la variété $V - \bigcup_i T_i$ en lui rajoutant un bord formé de $2k$ tores (deux tores pour chaque indice $i \in [1, \dots, k]$). Soit W la variété ainsi obtenue. (Inversement, on obtient V à partir de la variété W , en identifiant 2 par 2 les $2k$ composantes de ∂W). Nous dirons que W est la variété obtenue en coupant V suivant les

tores T_1, \dots, T_k . Le feuilletage de V induit un feuilletage de W , noté \mathcal{F} . Notons que W et \mathcal{F} ont les propriétés suivantes, par construction :

- W est connexe ; ∂W est réunion de $2k$ tores.
- toute feuille compacte de W n'appartenant pas à ∂W sépare W en deux composantes connexes. \mathcal{F} est transversalement orientable.

Il existe alors un ensemble fini éventuellement vide de sous-variétés E_1, \dots, E_p , difféomorphes à $T^2 \times [0, 1]$ et plongées d'une façon disjointe dans W , tels que :

- ∂E_i soit formé de feuilles compactes de \mathcal{F} , pour $i \in [1, \dots, p]$.
- toute feuille compacte de \mathcal{F} est contenue dans $\bigcup_i E_i$.

L'application du théorème aux composantes connexes de $W - \bigcup_i E_i$ conduit alors au résultat. ■

COROLLAIRE 2. — *Si V est de dimension 3, compacte et simplement connexe, et si V est munie d'un feuilletage dont les feuilles sont difféomorphes à T^2 ou R^2 , alors V est difféomorphe à S^3 .*

Démonstration. — Le corollaire 1 entraîne immédiatement que V est difféomorphe à la somme de deux tores solides. Un résultat bien connu établit que si V est une telle somme simplement connexe, alors V est difféomorphe à S^3 . ■

B. Classes de conjugaison de feuilletages de Reeb.

Nous allons maintenant examiner les classes de conjugaison de feuilletages de Reeb existant dans chacune des trois variétés obtenues dans le paragraphe A.

Novikov a établi qu'il n'existait qu'une seule classe de conjugaison de feuilletage de Reeb dans $D^2 \times S^1$ [9]. On trouvera une démonstration détaillée de ce fait dans l'appendice de [16]. On peut d'ailleurs ajouter une précision : si \mathcal{F} et \mathcal{F}' sont deux feuilletages de Reeb de $D^2 \times S^1$, il existe un homéomorphisme de conjugaison H dont la restriction à $\text{int}(D^2 \times S^1)$ est un difféomorphisme.

Le second cas à envisager est celui de T^3 feuilleté par des plans. On a pour ce cas le résultat suivant :

THEOREME 1. — Soit \mathcal{F} un feuilletage de T^3 , de classe C^2 au moins, dont toutes les feuilles sont difféomorphes à \mathbf{R}^2 , et tel que \mathcal{F} soit transversalement orientable. Alors \mathcal{F} est topologiquement conjugué au feuilletage défini par une action irrationnelle sur T^3 .

Démonstration. — Ecrivons T^3 comme le produit $S_1 \times S_2 \times S_3$ avec $S_1, S_2, S_3 = S^1$. Désignons par i_0 le plongement de :

$$i_0 : T^2 \approx S_1 \times S_2 \rightarrow T^3 = S_1 \times S_2 \times S_3$$

défini par $i_0(m, n) = (m, n, p)$ avec p point fixe de S_3 , $(m, n) \in S_1 \times S_2$. Notons $i_0(T^2) = T_0$.

Remarquons qu'il existe une immersion surjective :

$$F_0 : T^2 \times [0, 1] \rightarrow T^3 \quad \text{telle que :}$$

- $F_0|_{\text{int } T^2 \times [0, 1]}$ soit un difféomorphisme sur $T^3 - T_0$.
- $F_0|_{T^2 \times \{0\}} = F_0|_{T^2 \times \{1\}} = i_0$ (avec l'identification $T^2 \times \{0\} \approx T^2 \times \{1\} \approx T^2$).

On peut encore dire que F_0 définit par passage au quotient un difféomorphisme encore noté F_0 :

$$F_0 : T^2 \times [0, 1]/(x, 0) \sim (x, 1) \rightarrow T^3$$

avec $F_0|_{T^2 \times \{0\}} = i_0$.

Comme i_0 induit une injection des groupes fondamentaux, il résulte du corollaire III.D que i_0 est isotope à un plongement $i : T^2 \rightarrow T^3$, transverse à \mathcal{F} . Comme i est isotope à i_0 , il existe un difféomorphisme F :

$$F : T^2 \times [0, 1]/(x, 0) \sim (x, 1) \rightarrow T^3$$

avec $F|_{T^2 \times \{0\}} = F|_{T^2 \times \{1\}} = i$ (1)

Désignons par g le feuilletage induit de \mathcal{F} sur T^2 par i , et désignons par \mathcal{F}_1 le feuilletage induit de \mathcal{F} sur $T^2 \times [0, 1]$ par F . En raison de (1) :

$$\mathcal{F}_1|_{T^2 \times \{0\}} = \mathcal{F}_1|_{T^2 \times \{1\}} = g$$

Le feuilletage g a une holonomie triviale, à l'égal de \mathcal{F} : toutes ses feuilles sont donc difféomorphes à S^1 ou bien à \mathbb{R} . Le premier cas est exclu, car il implique que $\pi_1(T^2) \xrightarrow{i\#} \pi_1(T^3)$ ne soit pas injectif. Les feuilles de g étant toutes difféomorphes à \mathbb{R} , g possède des transversales fermées (un raisonnement d'Haeffliger montre que toute feuille non compacte des feuilletages de variétés compactes possède des transversales fermées [3]). Soit γ l'une d'elle. Notons j_0 l'inclusion ; $\gamma \times [0, 1] \rightarrow T^2 \times [0, 1]$ et $A_0 = j_0(\gamma \times [0, 1])$.

$j_0|_{\partial(\gamma \times [0, 1])}$ est transverse à \mathcal{F}_1 . Il en résulte, d'après le corollaire III.D., que j_0 est isotope à un plongement j tel que :

$$j|_{\partial(\gamma \times [0, 1])} = j_0|_{\partial(\gamma \times [0, 1])} \text{ et } j \text{ transverse à } \mathcal{F}_1 .$$

(Un petit aménagement du corollaire III.D. est nécessaire ici, puisque \mathcal{F}_1 est transverse au bord de $T^2 \times [0, 1]$ et que ∂A_0 appartient à ce bord. On peut, par exemple, prendre le double de $T^2 \times [0, 1]$ de façon à obtenir un feuilletage différentiable sur ce double, supposer que A_0 est plongée dans l'une des deux copies de $T^2 \times [0, 1]$ et remarquer que l'isotopie décrite dans la démonstration du théorème III.D a son support contenu dans cette copie).

Introduisons les intervalles $I, J \approx [0, 1]$ paramétrés par x et y respectivement, S^1 paramétré par θ . Identifions $\gamma \times [0, 1]$ avec $S^1 \times J$. Comme j est isotope à j_0 , il existe une immersion surjective G :

$$G : S^1 \times I \times J \rightarrow T^2 \times [0, 1] \text{ telle que :}$$

- $G|_{S^1 \times \text{int } I \times J}$ soit un difféomorphisme sur $T^2 \times [0, 1] - A$
- $G|_{S^1 \times \{0\} \times J} = G|_{S^1 \times \{1\} \times J} = j$

(avec les identifications :

$$S^1 \times \{0\} \times J \approx S^1 \times \{1\} \times J \approx S^1 \times J \approx \gamma \times [0, 1])$$

Soit par passage au quotient un difféomorphisme encore noté G :

$$G : S^1 \times I \times J /_{(\theta, 0, y) \sim (\theta, 1, y)} \rightarrow T^2 \times [0, 1]$$

avec $G|_{(S^1 \times 0 \times J)} = j$.

Notons $S^1 \times I \times J$ par M . Soit \mathcal{F}_2 le feuilletage induit de \mathcal{F}_1 sur M par G . \mathcal{F}_2 est transverse à ∂M , c'est-à-dire que \mathcal{F}_2 est transverse à $S^1 \times \partial I \times J$, $S^1 \times I \times \partial J$ et $S^1 \times \partial I \times \partial J$.

Notons \tilde{g} le feuilletage induit sur

$$S^1 \times I \approx S^1 \times I \times \{0\} \approx S^1 \times I \times \{1\}$$

Notons \tilde{l} le feuilletage induit sur

$$S^1 \times J \approx S^1 \times \{0\} \times J \approx S^1 \times \{1\} \times J$$

Les feuilletages \tilde{g} et \tilde{l} , étant transverses au bord de $S^1 \times I$ et de $S^1 \times J$ respectivement, et ayant une holonomie triviale, sont formés de chemins différentiables joignant une composante du bord à l'autre.

En combinant F et G, nous avons finalement un difféomorphisme :

$$G \circ F : S^1 \times I \times J / [(\theta, 0, y) \sim (\theta, 1, y) \text{ et } (\theta, x, 0) \sim (\theta, x, 1)] \rightarrow T^3 \quad (2)$$

tel que $G \circ F(\mathcal{F}_2) = \mathcal{F}$

Notons $T' = G \circ F(S^1 \times \{0\} \times J)$. Nous avons déjà défini :

$$T = G \circ F(S^1 \times I \times \{0\}) .$$

T' et T sont tous deux transverses à \mathcal{F} par construction.

$T' \cap T = \Gamma = F(\gamma)$ est aussi transverse à \mathcal{F} .

Si l désigne le feuilletage induit par \mathcal{F} sur T' :

$$G \circ F(\tilde{l}) = l , \quad G \circ F(\tilde{g}) = g , \quad \text{où } \tilde{l} \text{ et } \tilde{g} \text{ sont définis plus haut.}$$

LEMME 1. — *Les feuilles de \mathcal{F}_2 sont homéomorphes au disque de dimension 2 ; leur bord appartient à ∂M .*

Démonstration. — Par arrondissement des angles de M , on peut obtenir à partir de \mathcal{F}_2 un feuilletage différentiable de $D^2 \times S^1$, noté $\tilde{\mathcal{F}}_2$, transverse sur le bord. Les feuilles de \mathcal{F}_2 et celles de $\tilde{\mathcal{F}}_2$ sont d'intérieur homéomorphe à \mathbb{R}^2 , et ces deux feuilletages ont une holonomie triviale. L'intersection de $\tilde{\mathcal{F}}_2$ avec $\partial(D^2 \times S^1)$ est donc formée de courbes homéomorphes soit à \mathbb{R} , soit à S^1 . Notons g_2 ce feuilletage induit sur $\partial(D^2 \times S^1)$ et montrons que le premier cas est impossible. Posons $\mu_0 = \partial D^2 \times \theta_0$ pour $\theta_0 \in S^1$. Il existe une isotopie de μ_0 et un plongement μ de S^1 sur $\partial(D^2 \times S^1)$, tel que μ soit transverse à g_2 : cela résulte d'une démonstration analogue à celle utilisée pour le théorème III.D., qui peut se transposer facilement aux variétés de dimension 2, feuilletées par des droites et aux plongements de S^1 . μ est le bord d'un disque D , plongé dans $D^2 \times S^1$, disque que l'on

peut supposer être en position générale, par rapport à $\tilde{\mathfrak{F}}_2$. Un raisonnement d'Haeffliger (proposition 4.2 de [3]), montre que D coupe une feuille de $\tilde{\mathfrak{F}}_2$, d'holonomie non triviale, ce qui est contraire à l'hypothèse. Il en résulte que $\tilde{\mathfrak{F}}_2$ coupe $\partial(D^2 \times S^1)$ et donc que \mathfrak{F}_2 coupe ∂M suivant des feuilletages dont les feuilles sont homéomorphes à S^1 . Les feuilles de \mathfrak{F}_2 étant simplement connexes, à bord réunion de cercles, sont homéomorphes à D^2 . (En fait, elles sont difféomorphes à la variété à coins $[0, 1] \times [0, 1]$, les segments formant le bord étant des feuilles de \tilde{l} et de \tilde{g}). ■

LEMME 2. — *Il existe un champ de vecteurs différentiable de T^3 , noté N , transverse à \mathfrak{F} , dont toutes les orbites sont fermées, et de même période, et qui est tangent à T , T' (et donc aussi à $\Gamma = T \cap T'$).*

Démonstration. — Comme \mathfrak{F} est transversalement orientable, il existe un champ N_0 transverse à \mathfrak{F} . Il est facile de modifier N_0 par une isotopie à travers les champs de T^3 transverses à \mathfrak{F} de façon à obtenir un champ N_1 , transverse à \mathfrak{F} , tangent à T , T' et Γ et dont les orbites sur T et T' sont fermées. Cela peut se faire de la façon suivante :

— On choisit une métrique riemannienne sur T^3 de façon que pour cette métrique T , T' et donc Γ soient orthogonaux au feuilletage \mathfrak{F} . Comme l'ensemble des métriques riemanniennes sur T^3 est un ensemble convexe, N_0 est isotope à un champ N'_1 transverse à \mathfrak{F} et tangent à T et T' .

— N'_1 restreint à T et T' est isotope à un champ transverse à g et l dont toutes les orbites sont fermées. Le prolongement de cette isotopie à tout T^3 détermine le champ N_1 .

Il suffit maintenant de modifier le champ N_1 dans $T^3 - T \cup T'$ de façon que toutes les orbites soient fermées.

Désignons par \tilde{N}_1 le champ induit par N_1 sur M . Soit L une feuille de $\tilde{\mathfrak{F}}_2$. Soit C la variété obtenue en coupant M suivant L . C est difféomorphe à $L \times [0, 1]$. Notons encore par $\tilde{\mathfrak{F}}_2$ et \tilde{N}_1 le feuilletage et le champ induits sur C par $\tilde{\mathfrak{F}}_2$ et \tilde{N}_1 . Notons par L_0 et L_1 les variétés obtenues par la coupure en L . On a :

$$\partial C = \partial L \times [0, 1] \cup L_0 \cup L_1$$

où L_0 et L_1 correspondent à $L \times \{0\}$ et $L \times \{1\}$ respectivement. (Les feuilles de \mathfrak{F}_2 seront notées par L_τ avec $0 \leq \tau \leq 1$).

Les orbites de \tilde{N}_1 dans C sont des chemins différentiables joignant les points L_0 aux points de L_1 . En effet, chaque orbite coupe chaque feuille en un point au plus, car chaque feuille, différente de L_0 ou L_1 , sépare C en deux composantes connexes et que l'orientation de \tilde{N}_1 est constante le long d'une feuille. D'autre part, chaque orbite coupe chaque feuille en un point au moins : il suffit de le vérifier pour les orbites des points de L_0 , en supposant que \tilde{N}_1 est rentrant sur L_0 (et donc sortant sur L_1) :

Soit $x \in L_0$, $\varphi(\tau, x)$ l'orbite par x de \tilde{N}_1 . Soit p la projection $p : C \approx L \times [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ définie par $p(x, t) = \tau$, si et seulement si $(x, t) \in L_\tau$.

Considérons la fonction différentiable $p \circ \varphi(\tau, x)$ et supposons que l'orbite $\varphi(\tau, x)$ n'atteigne pas L_1 . Comme \tilde{N}_1 est tangent le long de $\partial L \times [0, 1]$ cela signifie que $p \circ \varphi(\tau, x)$ est définie pour $\forall \tau \geq 0$.

Mais comme \tilde{N}_1 est transverse à \mathfrak{F}_2 , et que C est compact, $p \circ \varphi(\tau, x)$ a une dérivée en τ , positive et bornée inférieurement par une constante positive : elle atteint donc toutes les valeurs positives, ce qui est en contradiction avec le fait qu'elle prend ses valeurs dans $[0, 1]$. Donc toute orbite quittant L_0 atteint L_1 et comme toute feuille différente de L_0 ou L_1 sépare C , toute orbite quittant L_0 coupe chaque feuille.

Désignons par $\psi : L_0 \rightarrow L_1$, le difféomorphisme défini par la condition : $y = \psi(x)$ si $x \in L_0$ et $y \in L_1$ appartiennent à la même orbite de \tilde{N}_1 . C'est un difféomorphisme bien défini d'après ce qui a été dit plus haut. Par l'identification $L \approx L_0 \approx L_1$, ψ définit un difféomorphisme encore noté ψ , de L sur L , et égal à l'identité sur ∂L (puisque les orbites de N_1 sont fermées sur ∂M).

Comme $\pi_0(\text{diff}(L, \partial L)) = 0$, ψ est isotope à l'identité rel. ∂L et il est facile de modifier \tilde{N}_1 en un champ \tilde{N} , égal à \tilde{N}_1 sur ∂M , transverse à \mathfrak{F}_2 , pour lequel l'application ψ construite plus haut soit l'identité, et dont toutes les orbites qui sont fermées soient de période égale. N détermine sur le quotient T^3 de M le champ cherché, puisque, comme \tilde{N}_1 , il est compatible avec les identifications sur ∂M . ■

LEMME 3. — *Il existe un flot continu $n(\tau; x)$ sur T^3 , dont les orbites sont celles du champ N du lemme 2, laissant invariant le feuilletage \mathfrak{F} et qui est périodique de période 1.*

Démonstration. — Le lemme 3 est une conséquence immédiate du théorème 6 de Sacksteder [20] et du lemme 2. Soit $n'(\tau; x)$ le flot associé au champ N par le théorème de Sacksteder. n' définit un flot noté \tilde{n}' sur M , laissant \mathfrak{F}_2 invariant. Soit L une feuille de \mathfrak{F}_2 comme dans le lemme 2. Comme les orbites de N sont fermées, d'égale période, il existe un $\tau > 0$ tel que $\tilde{n}'(\tau; L) = L$ et $\tilde{n}'(\tau'; L) \neq L$ pour $0 < \tau' < \tau$. Il en résulte que $n'(\tau; x) = x$ pour tout x et que τ est la période de n' . On prend alors le flot :

$$n(t; x) = n'(t \cdot \tau; x) \quad \blacksquare$$

Nous pouvons maintenant achever la démonstration du théorème 1. Désignons par $\tilde{n}(t; x)$ le flot induit par n sur M . D'une façon abusive, on notera encore par \tilde{n} , le flot induit sur $S^1 \times I$, $S^1 \times J$ et S^1 , sous les identifications : $S^1 \times I \times \{0\} \approx S^1 \times I \times \{1\} \approx S^1 \times I$ et les identifications analogues pour J , $S^1 \times \{\varepsilon\} \times \{\varepsilon'\} \approx S^1$, avec $\varepsilon, \varepsilon' = 0$ ou 1 .

Le feuilletage de \tilde{g} sur $S^1 \times I$ définit un difféomorphisme φ de S^1 par la condition :

$\theta_2 = \varphi(\theta_1)$ si et seulement si $(\theta_1, 0)$ et $(\theta_2, 1)$ sont portés par la même feuille de \tilde{g} .

De même \tilde{l} définit un difféomorphisme φ' de S^1 .

Comme \tilde{g} et \tilde{l} sont invariants par \tilde{n} , il existe deux nombres α et β entre 0 et 1 tels que, pour tout $p \in S^1$ et tout $\tau \in \mathbb{R}$:

$$\tilde{n}(\tau + \alpha; p) = \varphi(\tilde{n}(\tau; p)) \quad \text{et} \quad \tilde{n}(\tau + \beta; p) = \varphi'(\tilde{n}(\tau; p)) \quad (3)$$

Considérons dans M les deux champs de vecteurs :

$$X_0 = \frac{\partial}{\partial x} + \alpha \frac{\partial}{\partial \theta} \quad \text{et} \quad Y_0 = \frac{\partial}{\partial y} + \beta \frac{\partial}{\partial \theta}$$

Ces deux champs commutent, sont linéairement indépendants en tout point. Ils définissent un feuilletage de M , noté \mathfrak{F}'_2 , compatible avec les identifications : $(\theta, 0, y) \sim (\theta, 1, y)$ et $(\theta, x, 0) \sim (\theta, x, 1)$ sur ∂M .

L'intersection de \mathfrak{F}'_2 avec ∂M définit donc des feuilletages de

$S^1 \times I$ et $S^1 \times J$, notés \tilde{g}' et \tilde{l}' respectivement. Le feuilletage \mathcal{F}'_2 est invariant par le flot du champ $\frac{\partial}{\partial \theta}$. Nous noterons ce flot par $\tilde{m}(\tau; x)$, ainsi que les flots qu'il induit sur $S^1 \times I$, $S^1 \times J$ et S^1 , comme il a été fait pour \tilde{n} ; $\tilde{m}(\tau; x)$ est périodique de période 1.

Les difféomorphismes de S^1 associés à \tilde{g}' et \tilde{l}' sont les rotations d'angle α et β , respectivement notées l_α et l_β .

Les flots \tilde{n} et \tilde{m} vont nous permettre de construire un homéomorphisme \tilde{H} , conjuguant \mathcal{F}'_2 et \mathcal{F}_2 et compatible avec les identifications :

$$(\theta, 0, y) \sim (\theta, 1, y) \quad \text{et} \quad (\theta, x, 0) \sim (\theta, x, 1) \quad \text{sur } \partial M.$$

\tilde{H} va être construit en trois étapes : il sera d'abord défini sur les arêtes $S^1 \times \{\varepsilon\} \times \{\varepsilon'\}$ ($\varepsilon, \varepsilon' = 0$ ou 1) de ∂M , puis prolongé successivement à ∂M et à M .

i) Première étape : Soit $p_0 \in S^1$ le point correspondant à $\theta = 0$. Définissons un homéomorphisme h de S^1 par :

$$h(\theta) = \tilde{n}(\theta; p_0) \quad \text{pour } \theta \in S^1$$

Remarquons que les relations (3) entraînent que h conjugue φ et l_α ainsi que φ' et l_β .

On pose :

$$\tilde{H}(\theta, \varepsilon, \varepsilon') = (h(\theta), \varepsilon, \varepsilon') \quad \text{pour } \varepsilon, \varepsilon' = 0 \text{ ou } 1$$

ii) Deuxième étape : désignons par r_0 et r'_0 les feuilles de \tilde{g} et \tilde{g}' respectivement, passant par le point $(p_0, 0) \in S^1 \times I$,

De même, s_0 et s'_0 désignent les feuilles de \tilde{l} et \tilde{l}' passant par le point $(p_0, 0) \in S^1 \times J$.

$$\text{Soient } \lambda_1 : r'_0 \rightarrow r_0 \quad \text{et} \quad \lambda_2 : s'_0 \rightarrow s_0$$

deux difféomorphismes quelconques tels que l'on ait :

$$\lambda_1(p_0, 0) = (p_0, 0) \quad \text{et} \quad \lambda_1(p_0 + \alpha, 1) = (\varphi(p_0), 1)$$

et des conditions similaires pour λ_2 .

Définissons un homéomorphisme h_1 de $S^1 \times I$, par :

$$h_1(\tilde{m}(\tau, x_0)) = \tilde{n}(\tau, \lambda_1(x_0)) \quad \text{pour } x_0 \in r_0 \text{ et } \tau \in [0, 1]$$

C'est un homéomorphisme bien défini car tout point de $S^1 \times I$ s'exprime de façon unique sous la forme $\tilde{m}(\tau, x_0)$ avec $x_0 \in r_0$ et $0 \leq \tau < 1$, et car \tilde{m} et \tilde{n} sont périodiques de période 1.

Nous allons vérifier que h_1 est compatible avec l'identification $(\theta, 0) \sim (\theta, 1)$ sur $\partial(S^1 \times I)$ et que l'homéomorphisme qu'il induit sur S^1 par cette identification est justement l'homéomorphisme h du i).

En effet, si $(\theta, 0) \in S^1 \times \{0\}$. Alors $(\theta, 0) = \tilde{m}(\theta, p_0)$

$$\text{et} \quad h_1(\theta, 0) = (\tilde{n}(\theta, p_0), 0) = (h(\theta), 0)$$

Si maintenant l'on considère $(\theta, 1) \in S^1 \times \{1\}$:

$$h_1(\theta, 1) = h_1[\tilde{m}(\theta - \alpha, (p_0 + \alpha, 1))] = \tilde{n}(\theta - \alpha, \lambda_1(p_0 + \alpha, 1))$$

$$\text{soit : } h_1(\theta, 1) = \tilde{n}(\theta - \alpha, (\varphi(p_0), 1)) = (\tilde{n}(\theta - \alpha, \tilde{n}(p_0, \alpha)), 1)$$

$$\text{soit :} \quad h_1(\theta, 1) = (\tilde{n}(\theta, p_0), 1)$$

$$\text{c'est-à-dire :} \quad h_1(\theta, 1) = (h(\theta), 1) .$$

Enfin, il est clair par construction, que h_1 conjugue \tilde{g}' et \tilde{g} .

On définit de même h_2 sur $S^1 \times J$ à l'aide de λ_2 ; h_2 a des propriétés analogues à celles de h_1 .

On peut maintenant définir \tilde{H} sur ∂M par :

$$\tilde{H}(\theta, x, \varepsilon) = (h_1(\theta, x), \varepsilon)$$

$$\text{et} \quad \tilde{H}(\theta, \varepsilon, y) = r \circ (h_2(\theta, x), \varepsilon) \quad \varepsilon = 0 \text{ ou } 1$$

où $r : J \times I \rightarrow I \times J$ est l'inversion $(y, x) \rightarrow (x, y)$

\tilde{H} ainsi défini prolonge le \tilde{H} défini au i).

iii) Troisième étape : \tilde{H} défini au ii) sur ∂M conjugue le feuilletage induit par \mathfrak{F}'_2 sur ∂M avec le feuilletage induit par \mathfrak{F}_2 sur ∂M : cela résulte du fait que h conjugue φ et l_α ainsi que φ' et l_β comme il a été constaté au i).

En particulier, si L_0 et L'_0 sont des feuilles de \mathfrak{F}_2 et \mathfrak{F}'_2 contenant le point $(p_0, 0, 0)$, on a :

$$\tilde{H}(\partial L'_0) = \partial L_0$$

Choisissons un difféomorphisme quelconque Λ :

$$\Lambda : L'_0 \rightarrow L_0 \text{ prolongeant } \tilde{H}|_{\partial L'_0} .$$

On peut alors définir un homéomorphisme \tilde{H} de M par :

$$\tilde{H}(\tilde{m}(\tau, x)) = \tilde{n}(\tau, \Lambda(x)) \quad \text{pour } x \in L'_0 \quad \text{et } \tau \in [0, 1]$$

\tilde{H} est bien défini et prolonge \tilde{H} déjà défini sur ∂M au ii), car Λ prolonge λ_1 et λ_2 par construction.

Comme \tilde{H} est compatible avec les identifications sur ∂M , il détermine un homéomorphisme H sur le quotient de M . Il en résulte que $H^{-1} \circ G \circ F$ est un homéomorphisme de T^3 conjugant \mathfrak{F} avec le feuilletage \mathfrak{F}' défini par les deux champs d'écriture :

$$\frac{\partial}{\partial x} + \alpha \frac{\partial}{\partial \theta} \quad \text{et} \quad \frac{\partial}{\partial y} + \beta \frac{\partial}{\partial \theta}$$

dans la représentation de T^3 comme produit : $S^1 \times S^1 \times S^1$ obtenue par les identifications $(\theta, x, 0) \sim (\theta, x, 1)$ et $(\theta, 0, y) \sim (\theta, 1, y)$ sur $\partial(S^1 \times I \times J) = \partial(M)$.

Comme \mathfrak{F} est un feuilletage par plans, il en est de même de \mathfrak{F}' , ce qui entraîne que α et β sont deux nombres irrationnels, rationnellement indépendants.

Ceci achève la démonstration du théorème 4.2. ■

Dans l'étude des classes de conjugaison de feuilletages de Reeb, le dernier cas à envisager est celui des feuilletages de Reeb de $T^2 \times [0, 1]$. On a vu dans la partie I, qu'il existe deux types de feuilletages manifestement non conjugués : un des deux types a un champ transverse rentrant sur les composantes de $\partial(T^2 \times [0, 1])$ et l'autre type a un champ transverse rentrant sur une composante et sortant sur l'autre. On peut établir un résultat de conjugaison en utilisant des méthodes analogues à celles employées plus haut. Le théorème suivant a été démontré par H. Rosenberg et G. Chatelet :

THEOREME 2. — *Soient \mathfrak{F} et \mathfrak{F}' deux feuilletages de Reeb de $T^2 \times [0, 1]$. Une condition nécessaire et suffisante pour que \mathfrak{F} et \mathfrak{F}' soient conjugués est que :*

i) \mathfrak{F} et \mathfrak{F}' soient de même type.

ii) *Si T est un tore isotope à $T^2 \times \{0\}$ transverse à \mathfrak{F} et si T' est un tore isotope à $T^2 \times \{0\}$ transverse à \mathfrak{F}' , les feuilletages, induits par \mathfrak{F} et \mathfrak{F}' sur T et T' , soient conjugués.*

PARTIE V

CLASSIFICATION DES VARIETES EN
FONCTION DE LEUR RANG

Cette partie est consacrée à l'établissement du théorème de classification annoncé dans l'introduction. On ne trouvera ici que les grandes lignes de la démonstration dont les détails apparaîtront dans [18]. Rappelons tout d'abord l'énoncé du théorème :

THEOREME DE CLASSIFICATION 1. — *Soit V une variété de dimension 3, compacte, connexe, orientable et sans bord.*

i) *Une condition nécessaire et suffisante pour que le rang de V soit égal à 3 est que V soit difféomorphe à T^3 .*

ii) *Pour que le rang de V soit égal à 2, il faut et il suffit que V soit difféomorphe à un fibré non trivial sur S^1 de fibre T^2 .*

iii) *Pour que V soit de rang 1, il faut et il suffit que V ne soit pas difféomorphe à un fibré sur S^1 de fibre T^2 .*

(La définition du rang d'une variété se trouve dans l'introduction).

Le i) est à peu près trivial. En effet T^3 étant difféomorphe à $S^1 \times S^1 \times S^1$, est de rang 3. Réciproquement, si V est de rang 3, et si Φ est une action non dégénérée de \mathbb{R}^3 sur V, chaque orbite de Φ est de dimension 3. Comme V est supposée connexe, V ne contient qu'une seule orbite, et comme V est supposée compacte, cette orbite, et donc V également, est difféomorphe à $T^3 = \mathbb{R}^3/\mathbb{Z}^3$ (voir l'introduction).

D'autre part les variétés orientables, difféomorphes à un fibré sur S^1 de fibre T^2 , sont de rang supérieur ou égal à 2. En effet, une telle variété s'écrit :

$$V = T^2 \times [0, 1]/(x, 0) \sim (f(x), 1)$$

où f est un difféomorphisme de T^2 préservant l'orientation. (On écrira, d'une façon condensée : $V = T^2 \times [0, 1]/f$).

Or chaque difféomorphisme de T^2 est isotope à un difféomorphisme linéaire F de déterminant ± 1 ; F est induit par un élément de

$GL(2, \mathbf{Z})$ et $T^2 \times [0, 1]/f$ est difféomorphe à $T^2 \times [0, 1]/F$. Puisque f préserve l'orientation, $\det. F = +1$.

Il existe une isotopie F_t telle que $F_0 = Id$ et $F_1 = F^{-1}$, et que $F_t \in GL^+(2, \mathbf{R})$ (matrices dans $GL(2, \mathbf{R})$ de déterminant positif), puisque ce groupe est connexe. On peut choisir F_t de façon que $F_t = F_0$ pour $t < \varepsilon$ et $F_t = F^{-1}$ pour $1 - \varepsilon < t \leq 1$, où ε désigne une certaine constante positive. Deux quelconques champs de vecteurs constants de \mathbf{R}^2 , linéairement indépendants et commutants, définissent deux champs linéairement indépendants et commutants de $T^2 = \mathbf{R}^2/\mathbf{Z}^2$. Maintenant, définissons deux champs linéairement indépendants et commutants de V par :

$$\text{pour } \forall t \in [0, 1] : X(t) = F_t(1, 0) \quad \text{et} \quad Y(t) = F_t(0, 1)$$

$X(t)$ et $Y(t)$ définissent deux champs constants de $T^2 \times \{t\}$. De plus, comme :

$$dF_1(X(1)) = (1, 0) = X(0) \quad \text{et} \quad dF_1(Y(1)) = (0, 1) = Y(0).$$

$X(t)$ et $Y(t)$ définissent une action non dégénérée de V . Ainsi, le rang de V est supérieur ou égal à 2.

Enfin, les variétés orientables ayant une caractéristique d'Euler nulle, leur rang est au moins égal à 1. Il résulte alors de tout ce qui précède, que le théorème 1 découle du résultat suivant :

THEOREME 2. — *Soit V une variété, compacte, connexe, orientable, à bord éventuellement non vide, et de dimension 3, telle qu'il existe une action Φ de \mathbf{R}^2 , non dégénérée, opérant sur V , en laissant invariant le bord de V , si ce dernier n'est pas vide. Alors, V est difféomorphe à un fibré sur S^1 de fibre T^2 si $\partial V = \emptyset$, ou bien à $T^2 \times [0, 1]$ si $\partial V \neq \emptyset$.*

Avant d'aborder la démonstration, remarquons que si $V = S^1 \times M$, où M est une variété compacte orientable à bord vide, V n'est fibré sur S^1 avec fibre T^2 que si $M = T^2$. En effet, si V est fibré sur S^1 de fibre T^2 , $\beta_1(V) = 3$ (où β_1 désigne le premier nombre de Betti). De plus, $\beta_1(V) = 1 + \beta_1(M)$, si $V = S^1 \times M$. D'où il résulte que $\beta_1(M) = 2$ et donc que $M = T^2$.

D'autre part, remarquons que le rang M est nul si $M \neq T^2$. Le théorème 1 a donc pour corollaire :

COROLLAIRE 1'. — *Si V est une variété de dimension inférieure ou égale à 3, compacte, orientable, connexe, sans bord, s'écrivant sous forme de produit de deux variétés :*

$$V = V' \times V'', \text{ alors :}$$

$$\text{rang } V = \text{rang } V' + \text{rang } V''$$

D'une façon générale, il est clair que :

$\text{rang}(V' \times V'') \geq \text{rang } V' + \text{rang } V''$. Il paraît donc raisonnable, au vu du corollaire, de formuler la conjecture suivante :

CONJECTURE. — *Si V' et V'' sont deux variétés compactes :*

$$\text{rang}(V' \times V'') = \text{rang}(V') + \text{rang}(V'')$$

A. Démonstration du théorème 2.

Soient V et Φ une variété et une action comme dans l'énoncé du théorème 2. Dans la première étape, nous allons supposer que Φ ne possède pas d'orbites compactes, ce qui entraîne que $\partial V = \emptyset$. Deux cas peuvent alors se présenter :

i) Toutes les orbites de Φ sont planes : d'après le théorème IV.A, V est alors difféomorphe à T^3 et la démonstration est achevée.

ii) Il existe des orbites cylindriques. (Rappelons que pour une action non dégénérée de \mathbf{R}^2 , trois types d'orbites sont possibles : les orbites planes homéomorphes à \mathbf{R}^2 , les orbites cylindriques homéomorphes à $S^1 \times \mathbf{R}$ et les orbites toriques, homéomorphes à T^2).

Dans le cas ii), nous allons utiliser le résultat suivant :

THEOREME. — *Soit Φ une action non dégénérée de \mathbf{R}^2 sur une variété V compacte, connexe, orientable, sans bord, de dimension 3. Si Φ possède des orbites non homéomorphes à \mathbf{R}^2 , il existe une action Φ_1 de \mathbf{R}^2 sur V telle que Φ_1 ait une orbite compacte.*

On trouvera dans l'appendice un résultat plus précis :

Dans les conditions de l'énoncé et pour tout $\varepsilon > 0$, il existe une action Φ_1 non dégénérée ayant une orbite compacte, telle que la

distance de Φ à Φ_1 dans la topologie C^1 soit inférieure à ε . (On trouvera une définition plus précise de cette distance dans l'appendice). Ce dernier résultat est un analogue du "closing lemma" démontré par Ch. Pugh [11]. De même que pour le "closing lemma", la difficulté de la démonstration du théorème de l'appendice réside dans le fait que l'on recherche une approximation dans la topologie C^1 . (On ne sait d'ailleurs pas établir des résultats analogues pour les topologies C^r , $r > 1$). Il est par contre très facile de trouver une action Φ_1 , proche de Φ dans la topologie C^0 , et a fortiori une action Φ_1 sans conditions de proximité avec Φ , comme le demande le théorème. Ceci est fait dans [18].

Ainsi, quitte à changer d'action dans le cas ii) ci-dessus, on peut supposer que Φ possède au moins une orbite compacte. (Ce qui est automatiquement réalisé si ∂V n'est pas vide).

On utilise maintenant l'argument déjà employé dans la démonstration du corollaire IV.A.1 : il existe un ensemble éventuellement vide d'orbites compactes : T_1, \dots, T_k , tel que $V - \bigcup_{i=1}^k T_i$ soit connexe, et tel que si T est une orbite compacte différente de T_1, \dots, T_k , alors $V - \bigcup_{i=1}^k T_i \cup T$ ne soit pas connexe. On désigne par W la variété obtenue en coupant V suivant les orbites T_i . On obtient ainsi une variété W telle que ∂W soit formée de $2k$ tores (éventuellement, on peut avoir $k = 0$).

Si $\tilde{\Phi}$ désigne l'action induite par Φ sur W , ∂W est formée d'orbites de $\tilde{\Phi}$ et $\tilde{\Phi}$ est non dégénérée.

Notons par $\tilde{\mathcal{F}}$ le feuilletage défini par $\tilde{\Phi}$. Comme V est orientable, il en est de même pour W , et puisque $\tilde{\mathcal{F}}$ est défini par une action, $\tilde{\mathcal{F}}$ est transversalement orientable. De plus, par construction, chaque feuille compacte de $\tilde{\mathcal{F}}$ sépare W en deux composantes connexes.

Comme dans le corollaire IV.A.1., on peut montrer qu'il existe un nombre fini de sous-variétés E_i , $i \in [1, \dots, p]$, telles que

$$E_i \approx T^2 \times [0, 1],$$

plongées dans W avec les propriétés suivantes :

$$- E_i \cap E_j = \emptyset, \text{ si } i \neq j$$

- ∂E_i est formé de deux feuilles compactes de $\tilde{\mathcal{F}}$
- toutes les feuilles compactes de $\tilde{\mathcal{F}}$ sont contenues dans $\bigcup_{i=1}^p E_i$.

Puisque nous l'avons omis dans la démonstration du corollaire IV.A.1., nous donnons ci-dessous une manière de trouver les sous-variétés E_i .

Parmi l'ensemble \mathcal{K} des orbites compactes de W , on introduit une relation notée \mathcal{R} :

$T \mathcal{R} T'$ si et seulement si $T = T'$ ou bien si $T \cup T'$ est le bord d'une sous-variété de W , difféomorphe à $T \times [0, 1]$.

Comme chaque élément de \mathcal{K} sépare W , le cobordisme entre T et T' est unique, s'il existe. Il en résulte que \mathcal{R} est une relation d'équivalence.

Maintenant, considérons, étant donné $T \in \mathcal{K}$, l'ensemble Σ des sous-variétés $E_i \approx T^2 \times [0, 1]$, associées aux couples de feuilles \mathcal{R} -équivalentes à T . On introduit un ordre partiel dans Σ par $E_i \leq E_j$ si et seulement si $E_i \subset E_j$. Un argument développé dans [16] montre que Σ est un ensemble inductif croissant et qu'il existe un seul élément maximal, noté E_T . (Il est essentiel ici qu'il existe un champ transverse à $\tilde{\mathcal{F}}$ et que chaque élément de \mathcal{K} sépare W). E_T contient toutes les orbites \mathcal{R} -équivalentes à T et aucune autre orbite compacte. On a ainsi trouvé des sous-variétés disjointes E_α , avec α parcourant l'ensemble des \mathcal{R} -classes d'équivalence. Par un argument de compacité et en utilisant encore une fois l'existence d'un champ transverse, il est facile de vérifier que les E_α sont en nombre fini : $\alpha \in [1, \dots, p]$.

Ceci étant, le théorème 2 découle du lemme suivant :

Lemme fondamental :

Soit M une variété compacte, connexe, orientable, de dimension 3, dont le bord ∂M est une réunion de k tores T_1, \dots, T_k , $k \geq 1$. Supposons qu'il existe une action non dégénérée de \mathbb{R}^2 , notée Φ , agissant sur M en laissant ∂M invariant et n'ayant aucune orbite compacte dans l'intérieur de M . Alors M est difféomorphe à $T^2 \times [0, 1]$.

Ce lemme étant provisoirement admis, nous pouvons achever la démonstration du théorème 2. Notons E'_1, \dots, E'_q les composantes

connexes éventuelles de la fermeture dans W de $W - \bigcup_{i=1}^k E_i$. Pour chacune de ces variétés, les hypothèses du lemme fondamental sont vérifiées. Donc, pour tout $i \in [1, \dots, q]$, $E'_i \approx T^2 \times [0, 1]$. Il en résulte que V est difféomorphe à $T^2 \times [0, 1]$ si $\partial V \neq \emptyset$ et que V est difféomorphe à $T^2 \times [0, 1]/(x, 0) \sim (f(x), 1)$, où f est un difféomorphisme de T^2 conservant l'orientation, si $\partial V = \emptyset$. ■

B. Démonstration du lemme fondamental.

Supposons que Γ soit une orbite cylindrique de Φ . On peut trouver deux champs X et Y , linéairement indépendants en tout point et commutants, définissant l'action Φ , tels que les orbites de X soient compactes sur Γ . Soit γ une de ces orbites. On définit :

$$\Gamma_t^+ = \overline{\bigcup_{s \geq t} \psi_s(\gamma)} \quad \text{et} \quad \Gamma_t^- = \overline{\bigcup_{s \leq t} \psi_s(\gamma)}$$

où ψ_s désigne le flot de Y , et soit :

$$\omega(\Gamma) = \bigcap_t \Gamma_t^+ \quad \text{et} \quad \alpha(\Gamma) = \bigcap_t \Gamma_t^-$$

Ces ensembles, appelés respectivement ensembles ω et α -limite de Γ sont invariants par Φ , compacts et non vides, et ne dépendent que de Γ .

On suppose d'autre part que M est munie d'une métrique satisfaisant aux deux conditions suivantes :

i) Pour chaque tore T_i , $i \in [1, \dots, k]$, il existe un voisinage collier $U_i \approx T_i \times [0, 1]$ de T_i dans M (avec $T_i \approx T_i \times \{0\}$) tel que pour chaque $x \in T_i$, $\{x\} \times [0, 1]$ soit un segment de géodésique de longueur unité. Pour $i \neq j$, $U_i \cap U_j = \emptyset$.

Soit $p_i : U_i \rightarrow T_i$ la projection suivant les géodésiques. Alors la deuxième condition est la suivante :

ii) Le feuilletage \mathcal{F} défini par Φ est transverse aux segments $p_i^{-1}(x)$ pour tout $x \in T_i$.

Si γ est une courbe simple fermée de T_i , on définit : $A(\gamma) = p_i^{-1}(\gamma)$. Clairement, l'intérieur de $A(\gamma)$ est transverse à \mathcal{F} .

La démonstration du lemme fondamental résulte des cinq lemmes suivants dont on trouvera les détails dans [16] et [18].

LEMME 1. — Soient M et Φ , satisfaisant aux hypothèses du lemme fondamental. Supposons que Φ possède une orbite cylindrique Γ et soit définie par deux champs X et Y comme ci-dessus. Alors $k \geq 2$ et il existe deux entiers i et $j \in [1, \dots, k]$, $i \neq j$, tels que $\omega(\Gamma) = T_i$ et $\alpha(\Gamma) = T_j$. De plus si $\varepsilon = i$ ou j , il existe une courbe simple fermée $C \subset T_\varepsilon$ et un voisinage V de C dans $A(C)$ tels que :

1) $V \cap \Gamma$ est une réunion de courbes simples fermées et disjointes, notées $\{C_l\}$, et appelées "cercles de retour", s'accumulant sur C , et

2) Si B_l est la couronne dans V bordée par C et C_l , on peut choisir l'orientation de Y de façon que les orbites ψ_s de Y aillent de C_l à C_{l+1} pour tout l , quand $t \rightarrow +\infty$, et que $B_{l+1} \subset B_l$ pour tout $\forall l$.

Démonstration. — $\omega(\Gamma)$ étant compact, Φ -invariant et non vide, contient un ensemble minimal K . Soit \tilde{M} le double de M et $\tilde{\Phi}$ l'action sur \tilde{M} égal à Φ sur chacune des copies de M . K est aussi un ensemble minimal pour $\tilde{\Phi}$ et est différent de \tilde{M} . Il résulte alors d'un théorème de Sacksteder [20] que K est une orbite compacte. Donc $\omega(\Gamma)$ contient une composante T_i du bord de M . De même, il existe $T_j \subset \alpha(\Gamma)$.

Maintenant, les propriétés 1 et 2 se déduisent d'arguments techniques aisés que l'on trouvera dans [18], et ces propriétés entraînent trivialement que $\omega(\Gamma) = T_i$, $\alpha(\Gamma) = T_j$ et que $i \neq j$. ■

LEMME 2. — Soient M et Φ , comme dans le lemme fondamental ; alors le nombre k de composantes connexes de ∂M est supérieur ou égal à 2.

Démonstration. — Supposons au contraire que $k = 1$. Alors, d'après le lemme 1, toutes les orbites dans $\text{int } M$ sont planes, et d'après le théorème IV.A : $M \approx D^2 \times S^1$. Or, un argument d'E. Lima [7], montre que $D^2 \times S^1$ ne possède pas d'action non dégénérée laissant le bord invariant. ■

Si Φ ne possède pas d'orbite cylindrique, il résulte du lemme 2 et du théorème 4.1 que $M \approx T^2 \times [0, 1]$ et la démonstration est achevée. On supposera donc, dorénavant, que Φ possède des orbites

cylindriques. D'après le lemme 1 on peut renuméroter les composantes de ∂M de façon qu'il existe n , $2 \leq n \leq k$, tel que T_1, \dots, T_n soient limite d'orbites cylindriques et que T_{n+1}, \dots, T_k ne le soient pas. On a alors le résultat suivant :

LEMME 3. — Il existe deux champs X et Y définissant Φ tels que pour tout $i \in [1, \dots, n]$, il existe un tore T'_i plongé dans $\text{int } M$ bordant avec T_i une sous-variété $E_i \approx T_i \times [0, 1]$, avec les propriétés suivantes :

$$1) E_i \cap E_j = \emptyset \quad \text{si } i \neq j \in [1, \dots, n]$$

2) Le champ Y est transverse à chaque tore T'_i (ceci entraîne en particulier que T'_i est transverse au feuilletage \mathfrak{F} défini par Φ).

Démonstration. — On choisit pour $\forall i \in [1, \dots, n]$ une orbite cylindrique Γ_i admettant T_i pour ensemble limite, puis deux champs X et Y de façon que les orbites de Y soient homéomorphes à \mathbf{R} sur tous les Γ_i . On utilise maintenant les résultats du lemme 1 pour construire des tores T'_i : disons que pour chaque $i \in [1, \dots, n]$, on considère le tore topologique T''_i formé de la partie d'orbite Γ_i , comprise entre deux cercles de retour consécutifs C_i et C_{i+1} , réunie avec la couronne $B_i - \text{int } B_{i+1}$. On suppose l suffisamment grand pour que $T''_i \subset U_i$. On modifie ensuite T''_i de façon à obtenir un tore T'_i vérifiant les hypothèses du lemme. ■

LEMME 4. — Soient les tores T'_i , $i \in [1, \dots, n]$ et le champ Y comme au lemme 3. Si L est une orbite de Φ coupant T'_i , alors $T'_i \cap L$ est homéomorphe à \mathbf{R} ou à S^1 . Le premier cas a lieu si et seulement si L est homéomorphe à \mathbf{R}^2 et le second cas a lieu si et seulement si L est homéomorphe à $S^1 \times \mathbf{R}$. De plus si ψ_s désigne le flot de Y :

$$\bigcup_{s \in \mathbf{R}} \psi_s(L \cap T'_i) = L$$

Démonstration. — Soient γ une composante connexe de $L \cap T'_i$ et p un point de γ . Désignons par $\Phi(u) : \mathbf{R}^2 \rightarrow L \subset M$ l'application $\Phi(u) = \Phi(u, p)$. Soit $\tilde{\gamma} = \Phi^{-1}(\gamma) : \tilde{\gamma}$ est une sous-variété fermée de \mathbf{R}^2 , difféomorphe à \mathbf{R} . Supposons que \mathbf{R}^2 ait des coordonnées (u, v) telles que $Y(x) = d\Phi_x \left(\frac{\partial}{\partial v} \right)$ pour $\forall x \in M$. Y étant transverse à γ ,

$\frac{\partial}{\partial \nu}$ est transverse à $\tilde{\gamma}$. De plus cette propriété se conserve pour les petites perturbations de $\frac{\partial}{\partial \nu}$, c'est-à-dire : $\exists \nu > 0$, tel que pour $\forall t : |t| < \nu$ $d\Phi_x \left(\frac{\partial}{\partial \nu} + t \frac{\partial}{\partial u} \right)$ soit transverse à T'_i pour $x \in T'_i$. (Ceci résulte du fait que Y est transverse à T'_i compact).

Donc $\frac{\partial}{\partial \nu} + t \frac{\partial}{\partial u}$ est transverse à $\tilde{\gamma}$ pour $|t| < \nu$. Il en résulte facilement que $L = \bigcup_{s \in \mathbb{R}} \psi_s(\gamma)$, donc que $L \cap T'_i = \gamma$. Les autres propriétés en découlent trivialement. ■

LEMME 5. — Soit $i \in [1, \dots, n]$. Si p est un point de T'_i , l'orbite de Y (défini au lemme 3) par p coupe un certain tore T'_j pour $j \in [1, \dots, n]$ et $j \neq i$; de plus, j ne dépend pas du point p sur T'_i .

Démonstration. — Par construction, des tores T' , il existe un point $p_0 \in T'_i$ et un nombre $j \neq i$, tels que l'orbite du champ Y par p_0 coupe T'_j . Maintenant un simple argument de continuité utilisant le lemme 4, prouve que pour tout point p de T'_i l'orbite de Y par p coupe aussi T'_j . ■

Nous pouvons maintenant achever la *démonstration* du lemme fondamental. Désignons par M' la variété : $M' = M - \bigcup_{i=1}^n E_i$. Il est clair que $M' \approx M$. Soit un certain $i \in [1, \dots, n]$ et le nombre j associé à i par le lemme 5. On suppose de plus, quitte à changer Y en $-Y$, que Y est rentrant dans M' le long de T'_i . Comme Y est transversal à chaque tore T' , il est trivial de vérifier que les orbites de Y par les points de T'_i coupent T'_i puis T'_j en un point unique et ne recoupent pas d'autre tore T'_k pour $k \neq i$ et de j .

Il en résulte un difféomorphisme $\varphi : T'_i \rightarrow T'_j$ défini par : $p' = \varphi(p)$ pour $p' \in T'_j$, $p \in T'_i$ si et seulement si p' et p appartiennent à la même orbite de Y .

Pour tout point $x \in T'_i$ désignons par $t(x)$ l'unique entier positif tel que $\varphi(x) = \psi_{t(x)}(x)$; $t(x)$ est une fonction différentiable sur T'_i . Maintenant on définit :

$$F : T'_i \times [0, 1] \rightarrow M'$$

par

$$F(x, \tau) = \psi_{\tau, \tau(x)}(x) .$$

Il est aisé de vérifier que F est un plongement. Comme de plus $F(\partial(T'_i \times [0, 1])) \subset \partial M'$ et que M' est connexe, F est un difféomorphisme : $M \approx M' \approx T^2 \times [0, 1]$. Ceci achève la démonstration du lemme fondamental. ■

Appendice.

Soit V une variété compacte, sans bord, de classe C^r ($r \geq 3$). On désignera par $T^1(V)$ le fibré tangent à V et par $\mathfrak{X}^1(V)$ l'espace vectoriel des sections de ce fibré, de classe C^{r-1} , muni de la C^1 -topologie. On désignera par $T^2(V)$ le fibré des 2-plans de V et par $\mathfrak{X}^2(V)$ l'espace des champs de 2-plans, de classe C^{r-1} , muni de la C^1 -topologie. Pour la commodité de l'écriture, on supposera que les C^1 -topologies sur $\mathfrak{X}^1(V)$ et $\mathfrak{X}^2(V)$ sont définies par des métriques notées $|x, y|_{C^1}$ pour $x, y \in \mathfrak{X}^1(V)$ ou $\mathfrak{X}^2(V)$.

Soit Φ une action de \mathbb{R}^2 dans V , de classe C^r et non dégénérée. Rappelons que les orbites d'une telle action sont des immersions injectives de \mathbb{R}^2 , $S^1 \times \mathbb{R}$ ou T^2 . (orbites planes, cylindriques ou toriques). On peut associer à l'action Φ un champ unique de $\mathfrak{X}^2(V)$, noté $P\Phi$ et défini de la façon suivante :

$$\text{Pour tout } m \in V, \quad \text{on pose} \quad P\Phi(m) = d_t \Phi(0, m) [T_0 \mathbb{R}^2]$$

où $d_t \Phi$ désigne la dérivée partielle de Φ par rapport à la variable $t \in \mathbb{R}^2$ et $T_0 \mathbb{R}^2$ désigne le plan tangent à l'origine 0 de \mathbb{R}^2 .

Ce champ de plans, complètement intégrable, est le champ tangent au feuilletage associé à l'action Φ .

Le but de cet appendice est d'obtenir pour certaines actions de \mathbb{R}^2 le résultat énoncé dans le théorème ci-dessous ; ce résultat est comparable au lemme de fermeture démontré par Ch. Pugh pour les champs de vecteurs [11]

THEOREME. — *Soient V une variété de classe C^r ($r \geq 3$), de dimension 3, compacte et sans bord, et Φ une action de \mathbb{R}^2 sur V , de classe C^r , non dégénérée et orientable, possédant des orbites non planes.*

Alors, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe une action ψ de \mathbb{R}^2 dans V , de classe C^r , non dégénérée et orientable possédant au moins une orbite compacte et telle que $P\psi$ soit $\varepsilon - C^1$ -proche de $P\Phi$ dans $\mathcal{X}^2(V)$.

Démonstration du théorème. — Si l'action Φ possède des orbites compactes, on peut prendre $\psi = \Phi$. On supposera donc par la suite que Φ ne possède aucune orbite compacte. Pour une telle action, nous pouvons énoncer le résultat suivant :

LEMME 1. — *Soit V une variété de dimension 3, compacte, sans bord, munie d'une action Φ de \mathbb{R}^2 non dégénérée, de classe C^2 au moins et sans orbites compactes. Alors V est un ensemble minimal de Φ , et donc l'unique ensemble minimal. Autrement dit, toutes les orbites de Φ sont partout denses.*

Démonstration du lemme 1. — Supposons que V ne soit pas Φ -minimale. Il existe un ensemble minimal $M \neq V$, puisque V est compact. Cet ensemble M , n'étant pas une orbite compacte, est la fermeture d'une orbite exceptionnelle (voir [20]). Mais ceci est impossible si la classe de Φ est 2 au moins, d'après un théorème de [20]. ■

Dans l'hypothèse du théorème, il existe des orbites non planes. Comme l'on suppose de plus qu'il n'existe pas d'orbites compactes, l'action Φ doit posséder quelques orbites cylindriques. Dans ce cas, le lemme 1 peut être précisé par le résultat suivant :

LEMME 2. — *Dans les hypothèses du lemme 1 et si Φ possède au moins une orbite non plane, toutes les orbites de Φ sont cylindriques et partout denses.*

Démonstration du lemme 2. — Soit Γ une orbite cylindrique de Φ . Nous savons déjà, par le lemme 1, que toutes les orbites de Φ , et donc Γ en particulier, sont partout denses. Démontrons qu'elles sont, de plus, toutes cylindriques.

Soit p un point de Γ . Comme Γ est une orbite cylindrique, le sous-groupe d'isotopie en p est de la forme $\{nv \mid n \in \mathbb{Z}\}$, où v est un vecteur de \mathbb{R}^2 différent de zéro. Soit u un second vecteur formant avec v une base de \mathbb{R}^2 . Associons à l'action Φ les deux champs de vecteurs :

$$X(m) = d_{\tau} \Phi(0, m) [u] \quad \text{et} \quad Y(m) = d_{\nu} \Phi(0, m) [\nu] \quad \text{pour} \quad \forall m \in V$$

X et Y sont deux champs de vecteurs commutants, définissant l'action Φ . Désignons par $x(\tau, m)$ et $y(\nu, m)$ les flots de X et de Y respectivement.

L'orbite de Y en p est fermée et de période 1. Nous allons voir qu'il en est de même en tout point de V . Tout d'abord, puisque X et Y commutent, tous les points de Γ ont une Y -orbite fermée et de période 1. Soit m un point quelconque de V . Puisque Γ est partout dense, il existe une suite $\{m_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ de points de Γ convergeant vers M . Pour chacun de ces points $y(1, m_i) = m_i$. Ce qui entraîne par continuité de $y(1, m) = m$. Autrement dit, le point m a une orbite Y -orbite fermée de période $1/k$, où k est un certain entier positif. Mais l'orbite de Φ par m est également partout dense ; le raisonnement précédent appliqué au point p et à l'orbite de Φ par m , prouve que l'orbite de Y par p est de période $1/kk'$ pour un certain k' positif. Comme cette période est égale à 1, il en résulte que $k = 1$. Donc, le point m est périodique de période 1 pour le champ Y . En conséquence, les orbites de Φ sont cylindriques ou toriques, mais la seconde éventualité est impossible puisque chaque orbite est partout dense d'après le lemme 1. ■

Remarquons qu'au cours de la démonstration du lemme 2, nous avons obtenu le résultat supplémentaire suivant :

LEMME 3. — *Dans les hypothèses du lemme 2, on peut définir l'action Φ par deux champs de vecteurs X et Y commutants, linéairement indépendants en tout point et tels que :*

- les orbites de X soient homéomorphes à \mathbb{R} .
- les orbites de Y soient fermées de période 1.

On peut maintenant achever la démonstration du théorème. Deux champs X et Y étant définis comme dans le lemme 3, on peut trouver une sous-variété U de V , difféomorphe à :

$S^1 \times I \times J$ (ou $I, J = [0, 1]$) avec les coordonnées :

$\theta \in S^1$, $x \in I$ et $z \in J$ dans lesquelles les champs X et Y aient pour expression :

$$X = \frac{\partial}{\partial x} \quad \text{et} \quad Y = \frac{\partial}{\partial \theta}$$

Les traces des orbites de Φ dans U sont les cylindres définis par $z = \text{Constant}$.

Les orbites de Φ étant partout denses sont également récurrentes au sens défini dans la partie V. La démonstration de Ch. Pugh pour la fermeture d'une orbite récurrente d'un champ de vecteur dans une variété de dimension 2 [11] se transpose immédiatement à notre situation : le voisinage V tient lieu de voisinage rectangulaire et les retours des orbites cylindriques suivant les cylindres $z = C^r$ jouent le rôle des retours des orbites difféomorphes à \mathbf{R} . Le passage de la dimension 2 à la dimension 3, se traduit uniquement par l'adjonction de la variable angulaire θ qui joue un rôle muet dans la démonstration. On peut traduire cela de la façon suivante : pour tout $\eta > 0$, il existe une fonction $\varphi(x, z)$ de $I \times J$ dans \mathbf{R} telle que les deux champs X_1 , Y_1 définis par :

$$X_1 = \begin{cases} X & \text{dans } V - U \\ \frac{\partial}{\partial x} + \varphi(x, z) \frac{\partial}{\partial z} & \text{dans } U \end{cases}$$

$$Y_1 = Y$$

aient les propriétés suivantes :

- i) X_1 est de classe C^r ; $|X, X_1|_{C^1} < \eta$.
- ii) X_1 et Y_1 commutent et sont linéairement indépendants en tout point de U , ce qui est clair par construction de X_1 et Y_1 . Soit ψ l'action définie par X_1 et Y_1 . Alors :
- iii) ψ possède une orbite compacte au moins.

Si l'on se donne maintenant un $\varepsilon > 0$ comme dans l'énoncé, il suffit de choisir un η suffisamment petit pour que la condition $|X, X_1| < \eta$ entraîne que : $|P\Phi, P\psi| < \varepsilon$, où ψ est l'action associée aux champs X_1 et Y_1 comme ci-dessus. ■

BIBLIOGRAPHIE

- [1] N. BOURBAKI, *Eléments de Mathématiques, Topologie générale*, livre III, Chapitre 7.
- [2] A. DENJOY, *Sur les courbes définies par les équations différentielles à la surface du tore*, *Journal de Math.*, Vol. 11 (1932).

- [3] A. HAEFLIGER, Variétés feuilletées, *Ann. E. Norm. Sup. Pise*, Série 3, 16 (1962).
- [4] HUREWICZ, Lectures on ordinary differential equations.
- [5] F. LAUDENBACH et R. ROUSSARIE, Un exemple de feuilletage sur S^3 . *Topology*, Vol. 9, N° 1 (Feb 70) 63-70.
- [6] W.B.R. LICKORISH, A foliation for 3-manifolds, *Annals of Math.*, Vol. 82, (1965).
- [7] E. LIMA, Commuting vector fields on S^2 , *Annals of Math.*, Vol. 81 (1965).
- [8] J. MILNOR, Morse theory. *Annals Studies* 51 ; Princeton Univ. Press (1963).
- [9] S.P. NOVIKOV, Topology of foliations, *Trudy Mosk. Math. Obshch.* Vol. 14, n° 513.83.
- [10] C.D. PAPAKYRIAKOPOULOS, On solid tori, *Proc. London Math. Soc.* (3) (1967).
- [11] Ch. PUGH, The closing Lemma, *Am. J. of Math.*, Oct. 1967.
- [12] G. REEB, Sur certaines propriétés topologiques des variétés feuilletées, *Actual. Scient. Ind.* (1952).
- [13] H. ROSENBERG, The rank of $S^2 \times S^1$, *Am. J. of Math.*, Vol. 87 (1965).
- [14] H. ROSENBERG, Singularities of R^2 actions, *Topology*, Vol. 7 (1968).
- [15] H. ROSENBERG, Foliations by planes, *Topology*, Vol. 7 (1968).
- [16] H. ROSENBERG et R. ROUSSARIE, Reeb Foliations, *Annals of Math.*, Vol. 91, N° 1 (Jan. 70), 1-24.
- [17] H. ROSENBERG et R. ROUSSARIE, Topological equivalence of Reeb Foliations, *Topology*, Vol. 9, N° 3 (Av. 70), 231-242.
- [18] H. ROSENBERG, R. ROUSSARIE et D. WEIL, A classification of closed orientable 3-manifolds of rank two, *Annals of Math.*, Vol. 91, N° 3 (May 70), 449-469.
- [19] R. ROUSSARIE et D. WEIL, Extension du "closing lemma" aux actions de R^2 sur les variétés de dimension 3. *Journal of Differential Equation*. Vol. 8, N° 2 (Sept. 70), 202-228.

- [20] R. SACKSTEDER, Foliations and pseudo-groups, *Amer. J. of Math.*, Vol. 87, (1965).
- [21] C.L. SIEGEL, Notes on differential equations on the torus, *Annals of Mathematics*, vol. 46 (1945), 423-428.
- [22] J. STALLINGS, On fibering certain 3-manifolds, *Topology of 3-manifolds*, Prentice Hall (1962).
- [23] WALLACE, *Differential Topology, First Steps*, Mathematics monograph series, Benjamin, Inc. (1968).
- [24] J. WOOD, Foliations on 3-manifolds, Thèse (Université de Princeton).

Thèse, Univ. Orsay, novembre 1969

Robert ROUSSARIE

Ecole Polytechnique, Centre de Mathématiques
17, rue Descartes. Paris 5^o