ANNALES DE L'INSTITUT FOURIER

GÉRARD CŒURÉ

Fonctionnelles analytiques sur certains espaces de Banach

Annales de l'institut Fourier, tome 21, nº 2 (1971), p. 15-21

<http://www.numdam.org/item?id=AIF_1971__21_2_15_0>

Ann. Inst. Fourier, Grenoble
21, 2 (1971), 15-21.

FONCTIONNELLES ANALYTIQUES SUR CERTAINS ESPACES DE BANACH

par Gérard CŒURÉ

Soit B un espace de Banach, on peut mettre sur l'espace H(B) des fonctions analytiques sur B, deux topologies intéressantes : celle H_ω définie par les semi-normes portées par les compacts [1] et celle H_ε [2] qui si B est séparable est la topologie bornologique associée à la topologie de la convergence compacte.

S. Dineen démontre [3] que ces deux topologies coïncident si B est un C_0-module ce qui nécessite entre autre que B ait une base. On démontre ici que ce résultat est encore vrai si B est un sous-espace homogène au sens de Silow de $L^1(\pi)$ où π est le tore à une dimension. L'espace H^1 de Hardy, par exemple, est un tel espace dont on ne sait pas [4] s'il possède une base.

$H_\varepsilon(B)$ et $H_\omega(B)$ ayant d'après [5] les mêmes bornés, le résultat annoncé est équivalent au théorème suivant.

THÉORÈME 1. — *Soit* B *un sous-espace homogène de* $L^1(\pi)$, *soit* T *une application linéaire continue de* $H_\varepsilon(B)$ *dans un espace de Banach* E, *alors* T *est porté par un compact, c'est-à-dire est continue dans l'espace* $H_\omega(B)$.

La démonstration est décomposée en un certain nombre de propositions et de lemmes. Rappelons que B est un sous-espace homogène de $L^1(\pi)$ si

a) l'opérateur de translation est une isométrie sur B;

b) si l'application : $t \to x_t$ à valeurs dans B est continue, où x_t désigne la translatée : $\theta \to x(\theta - t)$;

c) la norme dans B majore celle dans L^1.

Dans ces conditions [6], les sommes de Césaro σ_n sont des opérateurs bornés, de normes 1, sur B, qui convergent fortement vers l'identité.

Soit F un espace de Banach; on se donne une suite σ_n dans L(F) formée d'opérateurs de rangs finis, de normes inférieures à 1, commutant 2 à 2. On désigne par $1 - \sigma_n/F_k$ la restriction de $1 - \sigma_n$ à $F_k = \sigma_k(F)$.

Proposition 1. — *Si quel que soit k, $\|1 - \sigma_n/F_k\|$ est le terme général d'une série convergente alors l'opérateur $\Sigma_n = \prod_1^n [\lambda + (1 - \lambda)\sigma_i]$ converge en norme vers un opérateur compact pour tout*: $0 \leqslant \lambda < 1$.

Démonstration. — *a*) On démontre d'abord cette proposition sur chaque sous-espace F_k.

Le spectre de $1 - \sigma_i/F_k$ est pour i assez grand contenu dans un cercle de rayon $\dfrac{1}{1-\lambda}$, on a donc dans ces conditions :

$$\Pi[\lambda + (1 - \lambda)\sigma_i]/F_k = \exp\{\Sigma \operatorname{Log}[1 + (\lambda - 1)(1 - \sigma_i)]/F_k\},$$

or la norme de $\operatorname{Log}[1 + (\lambda - 1)(1 - \sigma_i)/F_k]$ est majorée par $-\operatorname{Log}[1 - (1 - \lambda)\|1 - \sigma_i/F_k\|]$, cette dernière quantité étant le terme général d'une série convergente, l'opérateur Σ_n/F_k converge en norme dans $L(F_k)$.

b) Σ_n peut s'écrire : $\Sigma_n = \sum_{p=0}^{p=n} \lambda^{n-p}(1 - \lambda)^p \sum_{\tau \in \Lambda_p(n)} \pi_\tau(\sigma)$ où : $\Lambda_p(n)$ est l'ensemble des combinaisons p à p des n premiers entiers, $\pi_\tau(\sigma) = \sigma_{\tau(1)} \ldots \sigma_{\tau(p)}$. Soit ${}_K\Lambda_p(n)$ l'ensemble des éléments de $\Lambda_p(n)$ prenant une valeur $\leqslant$ K, K étant choisi tel que $\lambda^K < \varepsilon$.

Si $\bigcup_{n,K} = \sum_{p=0}^{p=n} \lambda^{n-p}(1 - \lambda)^p \sum_{\tau \in {}_K\Lambda_p(n)} \pi_\tau(\sigma)$, on vérifie les relations suivantes :

$$\Big\|\Sigma_n - \bigcup_{n,K}\Big\| \leqslant \sum_{p=0}^{p=n-K} \lambda^{n-p}(1 - \lambda)^p C_{n-K}^p = \lambda^K < \varepsilon$$

$$\bigcup_{n,K} = \sum_{i=1}^{i=K} W_{n,i}^K . \sigma_i \text{ avec } W_{n,i}^K = (1 - \lambda)\lambda^i \prod_{n \geqslant j \geqslant i} (\lambda + (1 - \lambda)\sigma_j).$$

Les opérateurs $W_{n,i}^K$ convergent en norme sur $\sigma_i(F)$

lorsque n tend vers l'infini d'après le a), il existe donc un entier N tel que $\left\| \bigcup_{n,K} - \bigcup_{m,K} \right\| < \varepsilon$ pour n et m supérieurs à N. Il en résulte que pour $n > N$: $\|\Sigma_n - \Sigma_m\| < 2\varepsilon$ et les opérateurs Σ_n forment une suite de Cauchy qui converge vers un opérateur compact Σ car Σ est aussi la limite en norme de la suite $\bigcup_{n^2,n}$ qui est formée d'opérateurs de rangs finis.

Proposition 2. — *Si* B *est un espace homogène de* $L^1(\pi)$, *alors l'opérateur* $U_n = 2(1 + \sigma_{n^2})^{-1}.\sigma_n$ *a une norme qui tend vers* 1 *et l'opérateur* $T_n = (1 + \sigma_{n^2})^{-1}.(\sigma_n + \sigma_{n^2})$ *converge fortement vers l'identité.*

Démonstration. — Un calcul élémentaire fournit les relations suivantes :

$$(1)\ (1 + \sigma_{n^2})^{-1}.\sigma_n = 2n^2(1 - 2n) \sum_1^{n-3} \frac{p+1}{(2n^2-p)(2n^2-p-1)}\sigma_{p+1} - \frac{2n(n-1)}{(2n^2-n+2)(2n^2-n+1)}\sigma_{n-1} + \frac{n^2}{2n^2-n+1}\sigma_n$$

$$(2)\quad (1 + \sigma_{n^2})^{-1}.\sigma_{n^2} = -2n^2 \sum_1^{n^2-3} \frac{p+1}{(2n^2-p)(2n^2-p-1)(2n^2-p-2)}\sigma_{p+1} - \frac{2(n^2-1)}{(n^2+2)(n^2+1)}\sigma_{n^2-1} + \frac{n^2}{n^2+1}\sigma_{n^2}.$$

Désignons par $a_{p,n}$ et b_{p,n^2} les coefficients des σ_p dans les développements (1) et (2) respectivement :

$$U_n(1) = 1 = 2\sum_1^{n-1} a_{p,n} + \frac{2n^2}{2n^2-n+1}$$

Puisque les σ_p sont de norme 1, on a

$$\|U_n\| \leqslant \frac{2n^2}{2n^2-n+1} - 2\sum_0^{n-1} a_{p,n} = \frac{2n^2}{2n^2-n+1} + \left(-1 + \frac{2n^2}{2n^2-n+1}\right) = 1 + 0\left(\frac{1}{n}\right)$$

ce qui établit la propriété annoncée pour U_n.

De même puisque $T_n(1) = 1$ on a :

$$T_n(x) - x = \sum_{1}^{n} (a_{p,n} + b_{p,n^2})[\sigma_p(x) - x] + \sum_{n+1}^{n^2} (\sigma_p(x) - x),$$

sur tout x dans B.

Puisque σ_n converge fortement dans B, choisissons N tel que pour $n > N$ on ait $\|\sigma_n(x) - x\| < \varepsilon$. Dans ces conditions, on a

$$\|T_n(x) - x\| \leqslant \sum_{p=1}^{N} |a_{p,n} + b_{p,n^2}| \, \|x\| \\ + \varepsilon \left[\sum_{N+1}^{n} |a_{p,n} + b_{p,n^2}| + \sum_{n+1}^{n^2} |b_{p,n^2}| \right]$$

or le coefficient de ε s'écrit :

$$- \sum_{N+1}^{n-1} a_{p,n} + a_{n,n} - \sum_{N+1}^{n^2-1} b_{p,n^2} + b_{n^2,n^2};$$

il est majoré par :

$$- \sum_{1}^{n-1} a_{p,n} + a_{n,n} - \sum_{1}^{n^2-1} b_{p,n^2} + b_{n^2,n^2} = -[1 - 2a_{n,n} - 2b_{n^2,n^2}] \\ = -1 + \frac{2n^2}{2n^2 - n + 1} + \frac{2n^2}{n^2+1} = \mathcal{O}(1).$$

Enfin chaque $a_{p,n}$ ou b_{p,n^2} pour $p \leqslant N$ tend vers 0 lorsque n tend vers l'infini, il en résulte que $T_n(x) - x$ tend vers 0.

Soit $\mathcal{H}$ la famille des polynomes homogènes continus sur B. Si P est dans $\mathcal{H}$ B_P est la forme n-linéaire symétrique associée à P.

Proposition 3. — *Soit* T *une application linéaire continue de* $H_c(B)$ *dans un espace de Banach* E *tel que* :

(3) $$\|T(P)\| \leqslant K\gamma^{d^\circ P}\|P\|, \quad \forall P \in \mathcal{H},$$

K *et* γ *étant des constantes données* $(\gamma > 1)$.

Alors pour tout entier N, pour tout $\gamma' > 1$, il existe une constante K' et un opérateur u_{n^2} de la forme $\dfrac{1 + \sigma_{n^2}}{2}$

d'indice supérieur à N tel que :

$$(4) \qquad \|T(P)\| \leqslant K'(\gamma.\gamma')^{d^o P}\|P \circ u_{n^*}\| \quad \forall P \in \mathcal{H}.$$

Démonstration par l'absurde. — Si (4) n'avait pas lieu, il existerait une suite P_n dans $\mathcal{H}$ tel que :

$$(5) \qquad \|T(P_n)\| \geqslant n(\gamma.\gamma')^{d^o P_n}\|P_n \circ u_{n^*}\| \quad \text{pour tout} \quad n.$$

Le degré de P_n, que l'on notera k_n, est supérieur à n car si (5) n'avait pas lieu pour tous les polynomes de $d^o \geqslant n$, alors (4) aurait lieu avec $K' = n$ pour ces polynomes, quant à ceux de $d^o < n$, l'hypothèse (3) fournit par homogénéité une constante convenable pour (4) puisque les opérateurs u_{n^*} sont inversibles.

En utilisant la décomposition $P_n(x+y) = \sum_{r=0}^{k_n} C_{k_n}^r B_{p_n}^r(x, y)$ où $B_{p_n}^r(x, y)$ vaut $B_{p_n}(x, \ldots, x, y, r \text{ fois}, y)$, on s'aperçoit que (5) entraîne l'existence de r_n tel que :

$$(6) \qquad \|T[C_{k_n}^{r_n} B_{p_n}^{r_n}(\sigma_n, 1-\sigma_n)]\| \geqslant \frac{n}{k_n+1}(\gamma.\gamma')^{k_n}\|P.u_{n^*}\|.$$

Montrons que r_n est un $0\left(\frac{1}{k_n}\right)$; dans le cas contraire après extraction d'une suite, on aurait $\frac{r_n}{k_n} \geqslant \alpha > 0$. Or :

$$(7) \qquad C_{k_n}^{r_n} B_{p_n}^{r_n}(\sigma_n, 1-\sigma_n) = \frac{1}{2\pi i}\int_{|z|=\rho} P_n[\sigma_n + z(1-\sigma_n)]\frac{dz}{z^{r_n+1}}$$
$$= \frac{1}{2\pi i}\int_{|z|=\rho} P_n \circ u_{n^*}[2z(1-T_n) + U_n]\frac{dz}{z^{r_n+1}}$$

U_n et T_n sont les opérateurs de la proposition 2; pour chaque x dans B, $(1-T_n)(x)$ a donc une norme inférieure à $\frac{1}{\rho}$ et $U_n(x)$ a une norme inférieure à $\left(1+\frac{1}{\rho}\right)\|x\|$ pour n assez grand. Il en résulte la majoration suivante :

$$(8) \qquad \left\|\frac{C_{k_n}^{r_n} B_{p_n}^{r_n}[\sigma_n, 1-\sigma_n)(x)}{\|P.u_{n^*}\|}\right\|^{1/k_n} \leqslant \frac{1}{\rho^{r_n/k_n}}\left(2+\left(1+\frac{1}{\rho}\right)\|x\|\right)$$
$$\leqslant \frac{1}{\rho^{\alpha}}\cdot(\text{cte})$$

ρ pouvant être choisi arbitrairement grand, le premier membre de (8) tend vers 0 pour n infini, ce qui entraîne :

$$\frac{C_{k_n}^{r_n} B_{p_n}^{r_n}(\sigma_n, 1-\sigma_n)}{\| P_n . u_{n^2} \|}$$

est le terme général d'une série entière convergeant uniformément sur tout compact de B, mais aussi convergente dans l'espace $H_c(B)$ car ces deux topologies coïncident pour les suites d'après (6).

Il en résulte que :

$$\left\| T \left[\frac{C_{k_n}^{r_n} B_{p_n}^{r_n}(\sigma_n, 1-\sigma_n)}{P . u_{n^2}} \right] \right\|^{1/k_n}$$

tend vers 0 ce qui est contradictoire avec (5).

On a bien $r_n = 0\left(\frac{1}{k_n}\right)$. Enfin (4) (6) (7) entraînent les inégalités

$$\frac{1}{\rho^{r_n}} [2\rho \sup \|T_n\| + \|U_n\| + 2\rho]^{k_n} \|P \circ u_{n^2}\| \geqslant \|C_{k_n}^{r_n} B_{p_n}^{r_n}(\sigma_n, 1-\sigma_n)\|$$
$$\geqslant \frac{1}{K\gamma^{k_n}} \|T[C_{k_n}^{r_n} B_{p_n}^{r_n}(\sigma_n, 1-\sigma_n)]\| \geqslant \frac{n}{k_n+1} \cdot \frac{1}{K} \cdot \gamma'^{k_n} \|P \circ u_{n^2}\|.$$

Or d'après la proposition 2, $\|U_n\|$ tend vers 1 et T_n est majoré en norme puisque tendant fortement vers l'identité. On obtient donc par passage à la limite :

$1 + \mathcal{O}(\rho) \geqslant \gamma''$, ce qui est impossible pour ρ assez petit.

Fin de la démonstration du Théorème 1. — Soit γ_k une suite de nombres > 1 tel que le produit infini $\prod_0^\infty \gamma_k$ converge vers γ, alors il existe une suite C_k de constantes positives et une suite u_{n_k} d'opérateurs définis dans la proposition 3 d'indices $n_k \geqslant k$, tels que :

$$(9) \quad \|T(P)\| \leqslant C_k(\gamma_0\gamma_1 \ldots \gamma_k)^{d^\circ P} \|P \circ u_{n_1^2} \circ u_{n_2^2} \ldots u_{n_k^2}\|, \quad \forall P \in \mathcal{H}.$$

En effet les opérateurs u_n étant inversibles,

$$\tilde{T}(f) = T(f \circ u_{n_1^2}^{-1} \cdots \circ u_{n_k^2}^{-1})$$

définit une application linéaire continue sur $H_c(B)$ qui, si (9) est vrai à l'ordre k, vérifie la relation (3) de la proposition 3. La relation (4) fournit alors la relation 9 à l'ordre $(k+1)$. La relation (9) est vérifiée à l'ordre 0 pour un γ_0 convenable car T est continue.

Après avoir remarqué que les opérateurs u_{n^2} vérifient les hypothèses de la proposition 1, appelons K le compact mage de la boule unité ω par l'opérateur $\prod_1^\infty u_{n_k^2}$. La relation (9) signifie qu'étant donné $\varepsilon > 0$, il existe une constante C_ε telle que

$$\|T(P)\| \leqslant C_\varepsilon . \|P\|_{(\gamma+\varepsilon)(K+\varepsilon\omega)} \quad \forall P \in \mathcal{H}.$$

Enfin si f est analytique sur B, f est la somme de sa série de Taylor $f = \sum_0^\infty P_n$ convergente dans $H_c(B)$ et l'on a, λ étant donné > 1, :

$$\|T(f)\| \leqslant \sum_0^\infty \|T(P_n)\| \leqslant C_\varepsilon \sum_0^\infty \|P_n\|_{(\gamma+\varepsilon).(K+\varepsilon\omega)}$$
$$\leqslant \frac{1}{1-\lambda} \cdot C_\varepsilon \|f\|_{\lambda(\gamma+\varepsilon)(K+\varepsilon\omega)}.$$

BIBLIOGRAPHIE

[1] L. Nachbin, Topology on spaces of hol. mappings, Springer Verlag, Berlin, (1968).
[2] G. Cœuré, Fonct. plurisoush. sur les e.v.t. et applications à l'étude des foncts. analyt., *Ann. de l'Inst. Fourier* T. 20, (1970).
[3] S. Dineen, Holomorphic funct. on (C_0, X_b)- modules (à paraître).
[4] I. Singer, Bases in Banach Spaces, Springer-Verlag, Berlin, (1970).
[5] A. Hirschowitz, Bornologie des espaces de fonct. analyt. en dim. infinie, Sem. Lelong (Paris), (1969).
[6] Y. Katznelson, An Introduction to harm. Analysis (1968), John Wiley and Sons Inc.

Manuscrit reçu le 2 décembre 1970.

Gérard Cœuré,
Institut de Mathématiques,
2, rue de la Graffe,
54-Nancy.