

ANNALES DE L'INSTITUT FOURIER

RENÉ SPECTOR

Groupes localement isomorphes et transformation de Fourier avec poids

Annales de l'institut Fourier, tome 19, n° 1 (1969), p. 195-217

http://www.numdam.org/item?id=AIF_1969__19_1_195_0

© Annales de l'institut Fourier, 1969, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales de l'institut Fourier » (<http://annalif.ujf-grenoble.fr/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

GROUPES LOCALEMENT ISOMORPHES ET TRANSFORMATION DE FOURIER AVEC POIDS

par René SPECTOR

1. Introduction et préliminaires.

Dans tout ce qui suit, on entend par "groupe", sans autre précision, un groupe abélien localement compact dont la loi est notée additivement et dont l'élément neutre est désigné par 0 ; les intégrales sont prises par rapport à une mesure de Haar, sauf si une autre mesure est explicitement utilisée ; si E est une partie mesurable de G, $m(E)$ désigne $\int_E dx$, dx étant une mesure de Haar.

1.1. L'objet de ce travail est de généraliser certains résultats établis dans [5]. Il est démontré dans [5] que si G et G' sont deux groupes, φ un isomorphisme local de G vers G' défini sur un voisinage U de 0, K un compact contenu dans U, $K' = \varphi(K)$, alors l'application $f \longrightarrow f \circ \varphi^{-1}$ définit un isomorphisme topologique de l'algèbre de Banach S(K) sur l'algèbre de Banach S(K') (S(K) et S(K') désignent les sous-algèbres de A(G) et A(G') formées des éléments à supports dans K et K').

Les notations utilisées ici diffèrent quelque peu de celles de [5].

1.2. Soit G un groupe, Γ le groupe dual. On appelle "poids" sur Γ une fonction mesurable positive ω définie sur Γ , possédant les propriétés suivantes :

- a) ω est essentiellement bornée inférieurement par un nombre strictement positif ;
- b) ω est essentiellement bornée sur tout compact de Γ ;

c) il existe une constante k telle que l'on ait, presque partout sur $\Gamma \times \Gamma$,

$$\omega(x + y) \leq k\omega(x)\omega(y).$$

On voit alors aisément que le sous-espace $L^1_\omega(\Gamma)$ de $L^1(\Gamma)$ formé des fonctions f telles que $f\omega \in L^1(\Gamma)$ est stable par convolution et que, muni de la norme $\|f\|_\omega^1 = \int_\Gamma |f| \omega dx$, il forme une algèbre de Banach commutative.

Désignons par $A_\omega(G)$ la sous-algèbre de $A(G)$ formée des fonctions $f = \hat{g}$, $g \in L^1_\omega(\Gamma)$; munie de la norme $\|f\|_\omega = \|g\|_\omega^1$, c'est une algèbre de Banach semi-simple commutative.

L'ensemble des éléments de $A_\omega(G)$ à support dans un compact K est une sous-algèbre de Banach semi-simple de $A_\omega(G)$ que nous noterons $S_\omega(K)$; elle peut se réduire à 0 même si K possède un intérieur.

L'algèbre des restrictions des éléments de $A_\omega(G)$ à un compact K sera notée $A_\omega(K)$; c'est l'algèbre quotient de $A_\omega(G)$ par l'idéal fermé des éléments nuls sur K ; nous munirons $A_\omega(K)$ de sa norme canonique d'algèbre-quotient, qui en fait une algèbre de Banach semi-simple :

$$\|f\|_{\omega, K} = \inf_{\substack{g \in A_\omega(G) \\ g|_K = f}} \|g\|_\omega.$$

Enfin, $M_\omega(G)$ désignera l'espace des mesures de Radon bornées sur G , muni de la norme $\|\mu\|_{\frac{1}{\omega}} = \left\| \frac{\hat{\mu}}{\omega} \right\|_\omega$. $M_\omega(K)$ désigne l'ensemble des éléments de $M_\omega(G)$ à supports dans le compact K .

1.3. Etant donnés deux poids ω_1 et ω_2 sur le groupe Γ , ces poids sont dits *équivalents* (on note $\omega_1 \sim \omega_2$) si les fonctions ω_1/ω_2 et ω_2/ω_1 sont essentiellement bornées.

Il est clair que dans ce cas les algèbres $A_{\omega_1}(G)$ et $A_{\omega_2}(G)$ sont identiques, et que les normes définies à partir des deux poids sont équivalentes ; de même pour $S_{\omega_1}(K)$ et $S_{\omega_2}(K)$, pour $A_{\omega_1}(K)$ et $A_{\omega_2}(K)$.

PROPOSITION 1. — *Tout poids est équivalent à un poids continu.*

Ceci se démontre aisément par un procédé classique de régularisation.

Soit K un voisinage compact de 0 dans le groupe Γ sur lequel le poids ω est défini. Posons

$$\varphi(x) = \int_K \omega(x - y) dy .$$

On a, pour presque tout x ,

$$\varphi(x) \leq k \omega(x) \int_K \omega(-y) dy = a \omega(x)$$

$$\varphi(x) \geq \frac{1}{k} \omega(x) \int_K \frac{1}{\omega(y)} dy = b \omega(x) .$$

Soit d'autre part U un voisinage compact de 0 et $x_0 \in \Gamma$; la fonction caractéristique de $x_0 + U - K$, notée θ , appartient à $L^1(\Gamma)$; il en est donc de même de $\theta\omega$; si ψ désigne la fonction caractéristique de K , la fonction $(\theta\omega) * \psi$ est continue ; or on voit aisément qu'elle coïncide avec φ sur $x_0 + U$.

Ceci montre que φ est un poids continu équivalent à ω .

Par la suite, nous pourrions nous borner à considérer des poids continus ; en multipliant par une constante, on pourra supposer de plus que $\omega(x + y) \leq \omega(x) \omega(y)$ partout. Alors $\omega(0) \geq 1$.

1.4. Un poids ω , défini sur le groupe Γ dual de G , est dit "régulier" si l'algèbre $A_\omega(G)$ est régulière, c'est-à-dire si pour tout compact K de G et tout voisinage U de K il existe un élément f de $A_\omega(G)$ égal à 1 sur K , nul hors de U .

PROPOSITION 2. — *Pour que le poids continu ω , défini sur le groupe Γ , soit régulier, il faut et il suffit que, pour tout $x \in \Gamma$, on ait*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\log \omega(nx)}{n^2} < \infty .$$

Ce résultat est énoncé et établi par Y. Domar, dans [2], th. 2.11.

Il est clair que deux poids équivalents sont tous deux réguliers ou tous deux non réguliers : en effet ils définissent la même algèbre. D'ailleurs la condition nécessaire et suffisante de la proposition 2 est simultanément vérifiée ou non vérifiée par deux poids équivalents.

1.5. Le principal résultat de ce travail peut maintenant être indiqué.

Soient G et G' deux groupes, φ un isomorphisme local de G vers G' défini sur un voisinage U de 0 dans G ; à tout poids régulier ω sur le dual Γ de G on peut associer, de façon unique à une équivalence près, un poids régulier ω' sur le dual Γ de G' , de telle sorte que pour tout compact $K \subset U$, avec $K' = \varphi(K)$, les algèbres $S_\omega(K)$ et $S_{\omega'}(K')$ soient isomorphes ainsi que les algèbres $A_\omega(K)$ et $A_{\omega'}(K')$, ces isomorphismes étant définis par $f \longrightarrow f \circ \varphi^{-1}$.

Les méthodes utilisées ici généralisent (en les simplifiant) celles de [5] qui correspondent à des poids ω et ω' constants.

2. Poids sur les duals de deux groupes localement isomorphes.

2.1. Soit Γ un groupe. $\Omega(\Gamma)$ désigne l'ensemble des classes d'équivalence (pour la relation d'équivalence définie en 1.3) des poids réguliers. D'après la proposition 2, le produit et la somme de deux poids réguliers sont des poids réguliers. D'autre part $\omega = 0(\omega')$ est une relation d'ordre partiel qui passe au quotient et on remarque aisément que la somme de deux poids est équivalente à leur borne supérieure. $\Omega(\Gamma)$ est donc muni d'une structure d'ordre et d'une structure de semi-groupe additif qui se déduit de l'ordre (borne supérieure). Remarquons d'autre part que si h est une représentation continue de Γ_1 dans Γ_2 , ω un poids régulier sur Γ_2 , alors $\omega \circ h$ est un poids régulier sur Γ_1 et que l'application $\omega \longrightarrow \omega \circ h$ passe au quotient et définit une application de $\Omega(\Gamma_2)$ dans $\Omega(\Gamma_1)$, homomorphisme de semi-groupe. Si $\tilde{\omega}$ est dans $\Omega(\Gamma_2)$ la classe d'équivalence de ω , on notera $\tilde{\omega} \circ h$ celle de $\omega \circ h$ dans $\Omega(\Gamma_1)$. En particulier, si Γ_1 est un sous-groupe de Γ_2 , on utilisera la notation de restriction $\omega|_{\Gamma_1}$ pour les classes d'équivalence.

THEOREME 1. — Soit \mathfrak{G} la famille des groupes localement isomorphes à un groupe donné G_0 . $G, G', G'' \dots$ appartiennent à \mathfrak{G} ; $\Gamma, \Gamma', \Gamma'' \dots$ sont leurs duals respectifs.

1) A tout isomorphisme local $\rho_{GG'}$ de G vers G' on peut associer une application $\rho_{\Gamma\Gamma'}^*$ de $\Omega(\Gamma)$ dans $\Omega(\Gamma')$, de telle sorte que

a) Si G' est quotient de G par un sous-groupe discret, de sorte que Γ' est un sous-groupe fermé de Γ et si $\rho_{GG'}$ est l'isomorphisme local de G vers G' défini par la surjection canonique $G \longrightarrow G'$, alors

$$\rho_{\Gamma\Gamma'}^*(\omega) = \omega|_{\Gamma'}$$

pour tout ω de $\Omega(\Gamma)$.

b) Si G est un sous-groupe ouvert de G' , tel que Γ soit le quotient de Γ' par un sous-groupe compact, si $\rho_{GG'}$ est l'isomorphisme local de G vers G' défini par l'injection canonique de G dans G' , alors, en désignant par α la surjection canonique de Γ' sur Γ ,

$$\rho_{\Gamma\Gamma'}^*(\omega) = \omega \circ \alpha$$

pour tout ω de $\Omega(\Gamma)$.

c) Quels que soient les éléments G, G', G'' de \mathfrak{G} et les isomorphismes locaux $\rho_{GG'}$ de G vers G' , $\rho_{G'G''}$ de G' vers G'' , on a

$$(\rho_{G'G''} \circ \rho_{GG'})_{\Gamma\Gamma''}^* = \rho_{\Gamma'\Gamma''}^* \circ \rho_{\Gamma\Gamma'}^*$$

2) De plus les conditions a), b) et c) déterminent complètement la famille des applications $\rho_{\Gamma\Gamma'}^*$ (qui sont, par conséquent, des isomorphismes de semi-groupes).

Nous allons, pour le moment, construire les applications $\rho_{\Gamma\Gamma'}^*$. Ce n'est que par la suite que nous montrerons qu'elles possèdent les propriétés indiquées et qu'elles sont déterminées de façon unique.

2.2. Nous nous appuierons, pour définir les applications $\rho_{\Gamma\Gamma'}^*$, sur deux résultats fondamentaux.

LEMME 1. — Tout groupe possède un sous-groupe ouvert isomorphe au groupe $\mathbb{R}^n \times K$, \mathbb{R} désignant le groupe additif des nombres réels, n un entier ≥ 0 , K un groupe compact.

Ce résultat est établi, entre autres, dans [4].

LEMME 2. — *Etant donnés deux groupes localement isomorphes G et G' , il existe un groupe H et deux sous-groupes discrets de H , D et D' , tels que H/D soit isomorphe à un sous-groupe ouvert de G , et H/D' à un sous-groupe ouvert de G' .*

Ce résultat est établi dans [3] et [5].

En appliquant le lemme 1 au groupe H du lemme 2 on voit que l'on peut énoncer le résultat suivant :

LEMME 3. — *Etant donnés deux groupes localement isomorphes G et G' , il existe un sous-groupe ouvert U de G , un sous-groupe ouvert U' de G' , un entier $n \geq 0$, un groupe compact K et deux sous-groupes discrets N et N' de $\mathbb{R}^n \times K$ tels que U soit isomorphe à $(\mathbb{R}^n \times K)/N$ et U' à $(\mathbb{R}^n \times K)/N'$.*

Par dualité on a alors le résultat suivant : soient Γ et Γ' les duals de deux groupes localement isomorphes ; on peut alors trouver des groupes Λ et Λ' , un entier $n \geq 0$ et un groupe discret D tels que

Λ soit isomorphe au quotient de Γ par un sous-groupe compact ;

Λ' soit isomorphe au quotient de Γ' par un sous-groupe compact ;

Λ et Λ' soient des sous-groupes fermés de $\mathbb{R}^n \times D$ tels que les quotients $(\mathbb{R}^n \times D)/\Lambda$ et $(\mathbb{R}^n \times D)/\Lambda'$ soient compacts.

Si nous savons définir les applications $\rho_{\Gamma, \Lambda}^*$, $\rho_{\Lambda, \mathbb{R}^n \times D}^*$, $\rho_{\mathbb{R}^n \times D, \Lambda'}^*$, $\rho_{\Lambda', \Gamma'}^*$, nous poserons $\rho_{\Gamma, \Gamma'}^* = \rho_{\Lambda', \Gamma'}^* \circ \rho_{\mathbb{R}^n \times D, \Lambda'}^* \circ \rho_{\Lambda, \mathbb{R}^n \times D}^* \circ \rho_{\Gamma, \Lambda}^*$.

Il nous suffit donc de définir $\rho_{\Gamma, \Gamma'}^*$ et $\rho_{\Gamma', \Gamma}^*$ dans les deux cas suivants (où les isomorphismes locaux entre G et G' sont définis par les injections ou surjections canoniques) :

a) $\Gamma' = \Gamma/K$, K étant un sous-groupe compact de Γ .

b) Γ' sous-groupe fermé de Γ , Γ de la forme $\mathbb{R}^n \times D$ (n entier ≥ 0 , D groupe discret), Γ/Γ' compact.

Pour simplifier la rédaction, nous désignerons par $\Omega_0(\Gamma)$ l'ensemble des poids, réguliers ou non, sur Γ et nous construisons des applications $\Omega_0(\Gamma) \longrightarrow \Omega_0(\Gamma')$, que nous noterons encore (abusivement) $\rho_{\Gamma, \Gamma'}^*$, définies à des équivalences près et compatibles avec les relations d'équivalence.

2.3. Soit donc $\Gamma' = \Gamma/K$, K compact ; soit $\omega \in \Omega_0(\Gamma)$ et $\omega' \in \Omega_0(\Gamma')$. Nous définissons $\varphi' = \rho_{\Gamma, \Gamma'}^*(\omega)$ et $\varphi = \rho_{\Gamma, \Gamma'}^*(\omega')$ par les formules

$$\varphi = \omega' \circ \alpha, \alpha \text{ étant la surjection canonique } \Gamma \longrightarrow \Gamma'$$

$$\varphi'(x') = \int_K \omega(x + k) dk, \text{ avec } x' \in \Gamma', x \in \Gamma, x' = \alpha(x).$$

(Il est clair que cette intégrale, ne dépend pas du choix de x tel que $x' = \alpha(x)$).

On vérifie immédiatement que φ et φ' sont des poids et que

$$\rho_{\Gamma, \Gamma'}^*(\varphi) \sim \omega', \quad \rho_{\Gamma, \Gamma'}^*(\varphi') \sim \omega.$$

Ceci entraîne que l'on peut, à une équivalence près, ne considérer sur Γ que des poids constants sur les classes de K , c'est-à-dire de la forme $\omega' \circ \alpha$, ω' étant un poids sur Γ' que l'on peut choisir continu.

Dans ces conditions, ω et ω' sont tous deux réguliers ou non réguliers : en effet à tout $x \in \Gamma$, associons $x' = \alpha(x)$; réciproquement, à tout $x' \in \Gamma'$, associons $x \in \Gamma$ tel que $x' = \alpha(x)$; on a alors

$$\sum_1^\infty \frac{\log \omega(nx)}{n^2} = \sum_1^\infty \frac{\log \omega'(nx')}{n^2},$$

ce qui démontre la propriété, grâce à la Proposition 2.

2.4. Considérons maintenant le cas où Γ' est un sous-groupe fermé de Γ tel que le quotient Γ/Γ' soit compact. Nous n'utilisons pas, pour le moment, le fait que Γ soit de la forme $\mathbb{R}^n \times D$, D discret.

On peut alors trouver un ouvert K de Γ , d'adhérence compacte, tel que $\Gamma = \Gamma' + K$. Soient $\omega \in \Omega_0(\Gamma)$ et $\omega' \in \Omega_0(\Gamma')$, que l'on peut prendre continus. Définissons $\varphi' = \rho_{\Gamma, \Gamma'}^*(\omega)$ comme la restriction à Γ' de ω ; c'est évidemment un poids.

La définition de $\varphi = \rho_{\Gamma, \Gamma'}^*(\omega')$ est un peu plus ardue.

$$\begin{aligned} \text{Posons, pour tout } y \in \Gamma', \quad a_y(x) &= \omega'(y) \quad \text{si } x \in y + K \\ a_y(x) &= 0 \quad \text{si } x \notin y + K \end{aligned}$$

(les fonctions a_y sont semi-continues inférieurement) et soit

$$\varphi(x) = \sup_{y \in \Gamma'} a_y(x)$$

Montrons que φ est un poids. φ est semi-continue inférieurement, donc mesurable ; pour tout $x \in \Gamma$, soit $y \in \Gamma'$ tel que $x \in y + K$: alors $\varphi(x) \geq \omega'(y)$ ce qui montre que φ est bornée inférieurement ; d'ailleurs

$$\varphi(x) = \sup_{y \in (x-K) \cap \Gamma'} \omega'(y).$$

Si L est un compact de Γ , on a $\sup_{x \in L} \varphi(x) = \sup_{y \in (L-K) \cap \Gamma'} \omega'(y) < \infty$

car $(L-K) \cap \Gamma'$ est une partie d'adhérence compacte de Γ' . Soient enfin x_1 et $x_2 \in \Gamma$ et y_1, y_2 des points de $(x_1 - \bar{K}) \cap \Gamma'$ et $(x_2 - \bar{K}) \cap \Gamma'$ tels que $\varphi(x_1) = \omega'(y_1)$ et $\varphi(x_2) = \omega'(y_2)$; alors

$$\varphi(x_1 + x_2) = \omega'(y_3), \text{ pour un certain } y_3 \in (x_1 + x_2 - \bar{K}) \cap \Gamma'.$$

On a donc $y_3 - (y_1 + y_2) \in (\bar{K} + \bar{K} - \bar{K}) \cap \Gamma'$, partie compacte de Γ' sur laquelle ω' est borné ; il existe donc une constante a telle que

$$\varphi(x_1 + x_2) = \omega'(y_3) \leq a \omega'(y_1) \omega'(y_2) = a \varphi(x_1) \varphi(x_2).$$

On peut voir, de façon analogue, que $\rho_{\Gamma, \Gamma'}^*(\varphi) \sim \omega'$ et $\rho_{\Gamma, \Gamma'}^*(\varphi') \sim \omega$, ce qui permet de ne considérer, à une équivalence près, que des poids continus ω et ω' tels que $\omega' = \omega|_{\Gamma'}$.

2.5. Montrons que, dans ces conditions, ω' est régulier si et seulement si ω est régulier.

Il est clair que si ω est régulier, ω' l'est aussi.

Pour montrer la réciproque, nous allons utiliser le fait que Γ est de la forme $\mathbb{R}^n \times D$, n entier ≥ 0 , D groupe discret.

Nous désignerons, pour abrégé, par \mathbb{R}^n et D les sous-groupes $\mathbb{R}^n \times \{0\}$ et $\{0\} \times D$ de $\mathbb{R}^n \times D$.

Posons $\Gamma' \cap \mathbb{R}^n = \Gamma_1$.

Le groupe \mathbb{R}^n/Γ_1 est compact ; si, en effet, nous désignons par φ la surjection canonique $\mathbb{R}^n \times D \longrightarrow (\mathbb{R}^n \times D)/\Gamma'$ il existe une bijection canonique $\mathbb{R}^n/\Gamma_1 \longrightarrow \varphi(\mathbb{R}^n)$ qui est continue ([1a]) ; $\varphi(\mathbb{R}^n)$, image continue de \mathbb{R}^n dans le groupe compact $(\mathbb{R}^n \times D)/\Gamma'$,

est compact (car ouvert, donc fermé) et il suffit alors de montrer que la bijection $\mathbf{R}^n/\Gamma_1 \longrightarrow \varphi(\mathbf{R}^n)$ est un homéomorphisme, ce qui résulte du fait que cette application est ouverte car elle s'obtient par passage au quotient à partir de l'injection $\mathbf{R}^n \longrightarrow \mathbf{R}^n \times D$ qui est elle-même ouverte puisque D est discret.

De plus $\varphi(\mathbf{R}^n)$ est un sous-groupe ouvert du groupe compact $(\mathbf{R}^n \times D)/\Gamma'$, donc le nombre de ses classes est fini. Il en résulte que le nombre des classes de $\mathbf{R}^n + \Gamma'$ dans $\mathbf{R}^n \times D$ est fini. Si nous posons $\Gamma_2 = (\mathbf{R}^n + \Gamma') \cap D$, Γ_2 n'est autre que la projection de Γ' sur le facteur D de $\mathbf{R}^n \times D$, et Γ_2 est d'indice fini dans D .

Appelons ω_1 et ω_2 les restrictions de ω à \mathbf{R}^n et D respectivement. Pour $x \in \mathbf{R}^n$ et $d \in D$, $\omega(x, d) \leq \omega(x, 0) \omega(0, d) = \omega_1(x) \omega_2(d)$. Il suffit donc de voir que les poids ω_1 sur \mathbf{R}^n et ω_2 sur D sont réguliers. Or la restriction de ω_1 à Γ_1 est un poids régulier. Si nous montrons que ω_1 est régulier, il en résultera que la restriction de ω à $\mathbf{R}^n + \Gamma'$ est un poids régulier, donc que la restriction de ω_2 à Γ_2 est un poids régulier. Nous sommes donc ramenés à démontrer la propriété de régularité dans les deux cas suivants :

- a) Γ_2 sous-groupe d'indice fini du groupe discret D , $\omega'_2 = \omega_2|_{\Gamma_2}$ régulier ;
- b) Γ_1 sous-groupe de \mathbf{R}^n tel que \mathbf{R}^n/Γ_1 soit compact, $\omega'_1 = \omega_1|_{\Gamma_1}$ régulier.

Dans le cas a), soit $x \in D$, et p un entier ≥ 1 tel que $px \in \Gamma_2$; pour n entier ≥ 0 , posons $n = pq + r$, $0 \leq r \leq p - 1$. On a alors

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\log \omega_2(nx)}{n^2} \leq a + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\log \omega'_2(qy)}{n^2} \leq a + \frac{1}{p^2} \sum_{q=1}^{\infty} \frac{\log \omega'_2(qy)}{q^2} < \infty$$

avec $y = px \in \Gamma_2$, $a = \left(\max_{0 \leq r \leq p-1} \log \omega_2(rx) \right) \sum_1^{\infty} \frac{1}{n^2}$.

Dans le cas b), on sait que Γ_1 est de la forme $\mathbf{R}^p \times \mathbf{Z}^{n-p}$, $0 \leq p \leq n$ ([1b]). Par un raisonnement identique à celui qui a permis de passer de ω aux poids ω_1 et ω_2 sur les facteurs, on se ramène au problème suivant : étant donné un poids continu sur \mathbf{R} , ω , tel que $\forall q \in \mathbf{Z}$, $\sum_{q=1}^{\infty} \frac{\log \omega(q)}{q^2} < \infty$, montrer que $\forall x \in \mathbf{R}$, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\log \omega(nx)}{n^2} < \infty$.

En ajoutant un entier, on peut supposer $0 < x < 1$.

Soit alors p l'entier tel que $\frac{1}{p} \leq x < \frac{1}{p-1}$. On a, pour tout entier positif n , $\left[\frac{n}{p} \right] \leq nx = m_n + x_n < n$ avec $m_n \in \mathbb{Z}$, $0 \leq x_n < 1$. Il suffit évidemment, puisque ω est borné sur le compact $[0, 1]$, de montrer que

$$\sum \frac{\log \omega(m_n)}{n^2} < \infty.$$

Or $\frac{\log \omega(m_n)}{n^2} < \frac{\log \omega(m_n)}{m_n^2}$ et, dans la suite $\{m_n\}$, aucun entier n'est répété plus de p fois ; on a donc

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\log \omega(m_n)}{n^2} < \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\log \omega(m_n)}{m_n^2} \leq p \sum_{q=1}^{\infty} \frac{\log \omega(q)}{q^2} < \infty.$$

Ceci achève la démonstration de la régularité de ω .

Remarque. — Il peut sembler étonnant que, pour la construction du poids ω sur Γ à partir du poids ω' sur le sous-groupe Γ' , on n'ait pas besoin de prendre Γ sous une forme particulière, alors qu'on doit prendre Γ de la forme $\mathbb{R}^n \times D$ pour déduire la régularité de ω de celle de ω' . Cela tient à ce que la démonstration indiquée utilise essentiellement la structure d'ordre archimédien de \mathbb{R} ; je n'ai pas trouvé de méthode qui évite cette réduction à \mathbb{R} .

2.6. On note $C_0(\Gamma)$ l'ensemble des fonctions continues sur Γ qui tendent vers 0 à l'infini : $f \in C_0(\Gamma)$ si $\forall \varepsilon > 0$,

$$K_\varepsilon = \{x \in \Gamma \mid |f(x)| \geq \varepsilon\}$$

est compact.

PROPOSITION 3. — Avec les notations du théorème 1, soient $\omega \in \Omega_0(\Gamma)$ et $\omega' \in \Omega_0(\Gamma')$ deux poids continus tels que $\omega' \sim \rho_{\Gamma, \Gamma'}^*(\omega)$, $\omega \sim \rho_{\Gamma', \Gamma}^*(\omega')$. Alors les conditions (invariantes par les équivalences des poids)

i) $\frac{1}{\omega} \in C_0(\Gamma)$

ii) $\frac{1}{\omega'} \in C_0(\Gamma')$

sont équivalentes.

Compte tenu de l'unicité (qui reste à établir) des applications $\rho_{\Gamma, \Gamma'}^*$ et de la propriété c), il suffit d'établir la proposition dans les cas particuliers suivants

a) $\Gamma' = \Gamma/K$, K sous-groupe compact de Γ ; $\omega = \omega' \circ \alpha$.

b) Γ' sous-groupe fermé de Γ , Γ/Γ' compact ; $\omega' = \omega|_{\Gamma'}$.

Dans le cas a), supposons $\frac{1}{\omega'} \in C_0(\Gamma')$ et soit

$$K'_\varepsilon = \left\{ x' \in \Gamma' \mid \frac{1}{\omega'(x')} \geq \varepsilon \right\}.$$

alors, si α désigne l'application canonique

$$\Gamma \longrightarrow \Gamma', K_\varepsilon = \left\{ x \in \Gamma \mid \frac{1}{\omega(x)} \geq \varepsilon \right\} = \alpha^{-1}(K'_\varepsilon)$$

qui est compact car K est compact ; inversement, supposons que $\frac{1}{\omega} \in C_0(\Gamma)$ et que ω soit de la forme $\omega' \circ \alpha$. Alors $K'_\varepsilon = \alpha(K_\varepsilon)$ est compact.

Dans le cas b), supposons $\frac{1}{\omega} \in C_0(\Gamma)$; alors $K'_\varepsilon = K_\varepsilon \cap \Gamma'$ est compact ; inversement, soit $\frac{1}{\omega'} \in C_0(\Gamma')$; il existe un compact K de Γ tel que $\Gamma = \Gamma' + K$; si $x \in \Gamma$, $x = x' + k$ avec $x' \in \Gamma'$, $k \in K$; on a $\frac{1}{\omega(x')} \leq \frac{\omega(k)}{\omega(x)} \leq \frac{a}{\omega(x)}$, en posant $a = \sup_{k \in K} \omega(k)$. Donc $K_\varepsilon \subset K'_{\varepsilon/a} + K$ qui est compact.

3. Etude des algèbres $A_\omega(G)$.

Dorénavant, tous les poids considérés seront supposés réguliers.

Nous commençons par caractériser les éléments de $A_\omega(G)$ par une propriété de multiplication sur $M_\omega(G)$, les éléments de $A_\omega(K)$ et $S_\omega(K)$ par une propriété analogue.

Le poids ω sur Γ est continu et vérifie $\omega(x + y) \leq \omega(x) \omega(y)$.

3.1.

THEOREME 2. — *Soit f une fonction bornée, continue sur G , sommable.*

a) *Les trois propriétés suivantes sont équivalentes :*

i) $f \in A_\omega(G)$;

ii) *l'application linéaire $f^* : \mu \longrightarrow f\mu$ est continue sur $M_\omega(G)$ (avec la norme $\|\mu\|_{1/\omega}$) ;*

iii) *l'application linéaire f_1^* , restriction de f^* aux mesures définies par des fonctions sommables, est continue pour la norme $\|\mu\|_{1/\omega}$.*

b) *Si ces propriétés sont vérifiées, on a de plus*

$$\|f_1^*\| \leq \|f^*\| \leq \|f\|_\omega \leq \omega(0) \|f_1^*\|.$$

On vérifie aisément que i) \implies ii) ; ii) \implies iii) trivialement ;
et

$$\|f_1^*\| \leq \|f^*\| \leq \|f\|_\omega.$$

Montrons que iii) \implies i) et l'inégalité $\|f\|_\omega \leq \omega(0) \|f_1^*\|$.

La condition iii) implique que $g \longrightarrow \frac{\hat{f}g(0)}{\omega(0)}$ est une forme

linéaire continue sur $L^1(G)$ muni de la norme $\|g\|_{1/\omega} = \left\| \frac{\hat{g}}{\omega} \right\|_\infty$. Par

transformation de Fourier, et en appliquant le théorème de Hahn-Banach, on voit qu'il existe une mesure μ sur Γ de norme $\leq \|f_1^*\|$ telle que, $\forall g \in L^1(G)$,

$$\frac{\hat{f}g(0)}{\omega(0)} = \int_\Gamma \frac{\hat{g}}{\omega} d\mu.$$

Appelons ν la mesure définie sur Γ par $d\nu = \frac{d\mu}{\omega}$; on a alors

$$f\hat{g}(0) = \int_G fg \, dx = \omega(0) \int_\Gamma \hat{g} \, d\nu = \omega(0) \int_G g\hat{\nu} \, dx .$$

d'où, par la continuité de f , $f = \omega(0)\hat{\nu}$; comme $f \in L^1(G)$, ν est une mesure absolument continue, définie par $p \in L^1(\Gamma)$. On a alors

$$\int_\Gamma |p| \, \omega \, dx = \int_\Gamma d|\mu| \leq \|f_1^*\| ,$$

donc $f \in A_\omega(G)$ et $\|f\| \leq \omega(0) \|f_1^*\|$.

3.2. On déduit aisément de ce théorème le résultat suivant :

THEOREME 3. — Soit K un compact de G , V un voisinage compact de K , f une fonction continue à support dans K .

a) Les trois propriétés suivantes sont équivalentes :

i) $f \in S_\omega(K)$;

ii) l'application linéaire $f_V^* : \mu \longrightarrow f\mu$ est continue sur $M_\omega(V)$;

iii) l'application linéaire $f_{V,1}^*$, restriction de f_V^* aux mesures à supports dans V définies par des fonctions sommables, est continue.

b) Si ces propriétés sont vérifiées, il existe une constante a indépendante de f , telle que l'on ait

$$\|f_{V,1}^*\| \leq \|f_V^*\| \leq \|f\|_\omega \leq a \|f_{V,1}^*\| .$$

Comme ci-dessus, il suffit de montrer que iii) \implies i) et que l'on peut trouver a telle que $\|f\|_\omega \leq a \|f_{V,1}^*\|$.

Supposons iii) vérifiée, et prenons une fonction $\alpha \in A_\omega(G)$ égale à 1 sur K , à support dans V .

Soit $g \in L^1(G)$; alors $h = \alpha g \in L^1(V)$, ensemble des fonctions sommables à support dans V ; et un calcul simple montre que

$$\|h\|_{1/\omega} \leq \|\alpha\|_\omega \|g\|_{1/\omega} .$$

Donc

$$\|fg\|_{1/\omega} = \|f\alpha g\|_{1/\omega} = \|fh\|_{1/\omega} \leq \|f_{V,1}^*\| \|\alpha\|_\omega \|g\|_{1/\omega} ,$$

ce qui montre, en vertu du théorème 2, que $f \in S_\omega(K)$ et

$$\|f\|_{\omega} \leq a \|f_{V,1}^*\|,$$

en posant $a = \omega(0) \|\alpha\|_{\omega}$.

3.3. Avant d'énoncer un résultat analogue pour $A_{\omega}(K)$, il nous faut une définition.

DEFINITION. — *Un compact K de G sera dit "de type $\omega - M$ "⁽¹⁾ si pour tout $x \in K$ et tout voisinage V de x, il existe une mesure positive μ portée par $V \cap K$, telle que $\frac{\hat{\mu}}{\omega} \in C_0(\Gamma)$.*

Si $\frac{1}{\omega} \in C_0(\Gamma)$, tout compact est de type $\omega - M$.

Pour tout poids, tout compact de mesure positive au voisinage de chacun de ses points est de type $\omega - M$.

L'ensemble des mesures à support dans K, telles que $\frac{\hat{\mu}}{\omega} \in C_0(\Gamma)$ est désigné par $M_{\omega}^0(K)$, et normé par $\|\mu\|_{1/\omega} = \left\| \frac{\hat{\mu}}{\omega} \right\|_{\infty}$.

Nous pouvons maintenant établir le théorème suivant :

THEOREME 4. — *Soit K un compact de G de type $\omega - M$, f une fonction continue sur K.*

a) *Les trois propriétés suivantes sont équivalentes :*

- i) $f \in A_{\omega}(K)$.
- ii) *L'application linéaire $f_* : \mu \longrightarrow f\mu$ est continue sur $M_{\omega}(K)$.*
- iii) *L'application linéaire f_*^0 , restriction de f_* à $M_{\omega}^0(K)$, est continue.*

b) *Si ces propriétés sont vérifiées, on a de plus*

$$\|f_*^0\| \leq \|f_*\| \leq \|f\|_{\omega,K} \leq a \|f_*^0\|,$$

a étant un nombre indépendant de f.

⁽¹⁾ Cette terminologie est suggérée par les propriétés des ensembles de multiplicité stricte au voisinage de chaque point.

On voit facilement que $i) \implies ii) \implies iii)$, de même que $\|f_*^0\| \leq \|f_*\| \leq \|f\|_{\omega, K}$.

Supposons maintenant que $iii)$ soit vérifiée. Alors l'application $\mu \longrightarrow \frac{\hat{f}\mu(0)}{\omega(0)}$ est une forme linéaire continue sur $M_\omega^0(K)$, de norme $\leq \|f_*^0\|$. D'après le théorème de Hahn-Banach, il existe une mesure σ sur Γ telle que l'on ait, $\forall \mu \in M_\omega^0(K), \frac{\hat{f}\mu(0)}{\omega(0)} = \int_\Gamma \frac{\hat{\mu}}{\omega} d\sigma$, avec

$$\int_\Gamma d|\sigma| \leq \|f_*^0\|.$$

Appelons τ la mesure définie sur Γ par $d\tau = \frac{d\sigma}{\omega}$. On a alors

$$\hat{f}\mu(0) = \int_K f d\mu = \omega(0) \int_\Gamma \hat{\mu} d\tau = \omega(0) \int_G \hat{\tau} d\mu.$$

La condition imposée à K d'être de type $\omega - M$ et le fait que f et $\hat{\tau}$ soient continues impliquent que $f = \omega(0) \hat{\tau}|_K$.

Comme $\int_\Gamma \omega d|\tau| = \int_\Gamma d|\sigma| \leq \|f_*^0\|$, on en déduit (en remarquant que si $\alpha \in A(G)$ est égale à 1 sur K , alors $\alpha\hat{\tau} \in A_\omega(G)$ et $\|\alpha\hat{\tau}\|_\omega \leq \|\alpha\|_\omega \int d|\sigma|, f \in A_\omega(K)$ et $\|f\|_{\omega, K} \leq a \|f_*^0\|$, avec

$$a = \omega(0) \|\alpha\|_\omega.$$

Remarquons que l'espace $M_\omega^0(K)$ joue dans ce théorème le rôle joué par $L^1(G)$ au théorème 2. C'est parce que K peut être de mesure nulle au voisinage de certains points qu'il faut considérer $M_\omega^0(K)$ et non $L^1(K)$.

3.4. Les algèbres $A_\omega(G), A_\omega(K)$ et $S_\omega(K)$ sont invariantes par multiplication par les caractères. Nous allons voir maintenant que l'étude de ces multiplications permet de caractériser le poids ω à une équivalence près.

THEOREME 5. — Soit ω un poids continu sur le dual Γ de G , $\chi \in \Gamma$ un caractère de G . Alors l'application linéaire $p_\chi: f \longrightarrow \chi f$ de l'espace $A_\omega(G)$ dans lui-même est continue, et sa norme vérifie

$$\|p_\chi\| \leq \omega(\chi) \leq \omega(0) \|p_\chi\|.$$

En effet,

$$\|\chi f\|_\omega = \int_\Gamma |g(\psi - \chi)| \omega(\psi) d\psi = \int_\Gamma |g(\psi)| \omega(\psi + \chi) d\psi \leq \omega(\chi) \|f\|_\omega$$

en posant $f = \hat{g}$, $g \in L_\omega^1(\Gamma)$; d'où la continuité de p_χ et l'inégalité $\|p_\chi\| \leq \omega(\chi)$.

Inversement, soit $\varepsilon > 0$, et U un voisinage compact de 0 dans Γ tel que l'on ait, pour tout $\psi \in U$,

$$|\omega(\psi) - \omega(0)| < \varepsilon$$

$$|\omega(\chi + \psi) - \omega(\chi)| < \varepsilon,$$

et soit g une fonction continue, ≥ 0 , à support dans U , telle que $\int g d\psi = 1$; posons $f = \hat{g}$: $f \in A_\omega(G)$ et

$$\|f\|_\omega = \int_U g \omega d\psi \leq \omega(0) + \varepsilon$$

$$\|\chi f\|_\omega = \int_U g(\psi) \omega(\psi + \chi) d\psi \geq \omega(\chi) - \varepsilon ;$$

on en déduit, en faisant tendre ε vers 0, $\|p_\chi\| \geq \frac{\omega(\chi)}{\omega(0)}$.

3.5.

THEOREME 6. — Soit ω un poids (régulier) sur le dual Γ du groupe G , K un compact de G d'intérieur non vide (de sorte que $S_\omega(K)$ ne se réduit pas à 0) et soit $\chi \in \Gamma$ un caractère de G . Alors l'application linéaire $q_\chi : f \longrightarrow \chi f$ de $S_\omega(K)$ dans $S_\omega(K)$ est continue, et sa norme vérifie

$$\|q_\chi\| \leq \omega(\chi) \leq a \|q_\chi\|,$$

a étant une constante indépendante de χ .

La continuité de q_χ et l'inégalité $\|q_\chi\| \leq \omega(\chi)$ sont immédiates.

Soit $f \in S_\omega(K)$, telle que $f = \hat{g}$, $g \in L_\omega^1(\Gamma)$ et

$$\|f\|_\omega = \int_\Gamma |g| \omega d\psi = 1.$$

On a alors

$$\|q_\chi\| \geq \| \chi f \|_\omega = \int_\Gamma |g(\psi - \chi)| \omega(\psi) d\psi = \int_\Gamma |g(\psi)| \omega(\psi + \chi) d\psi ,$$

donc

$$\|q_\chi\| \geq \omega(\chi) \int_\Gamma \frac{|g(\psi)|}{\omega(-\psi)} ,$$

ce qui établit le théorème puisque g est choisie une fois pour toutes.

3.6. On n'a pas de théorème analogue pour $A_\omega(K)$ en supposant K de type $\omega - M$. Si, par exemple, $\frac{1}{\omega} \in C_0(\Gamma)$ et $K = \{0\}$, l'espace $A_\omega(K)$ s'identifie à C et la multiplication par χ est l'identité, de norme 1 pour tout $\chi \in \Gamma$.

Nous pouvons cependant énoncer le résultat suivant :

THEOREME 7. — Soit ω un poids sur le dual Γ de G , K un compact de G d'intérieur non vide, $\chi \in \Gamma$. Alors l'application linéaire $r_\chi : f \longrightarrow \chi f$ de $A_\omega(K)$ dans $A_\omega(K)$ est continue, et sa norme vérifie

$$\|r_\chi\| \leq \omega(\chi) \leq a \|r_\chi\| ,$$

a étant une constante indépendante de χ .

La continuité de r_χ et l'inégalité $\|r_\chi\| \leq \omega(\chi)$ sont immédiates.

Soit K_0 un compact d'intérieur non vide, tel que $K_0 \subset \overset{\circ}{K}$ et soit $g \in S_\omega(K_0)$; appelons f la restriction de g à K , α un élément de $A_\omega(G)$ tel que $\alpha = 1$ sur K_0 , 0 hors de K . Si h est un représentant quelconque de f , on a $\alpha h = g$.

Soient $\varepsilon > 0$ et h un représentant de f tel que

$$\| \chi f \|_{\omega, K} \geq (1 - \varepsilon) \| \chi h \|_\omega .$$

On a alors

$$\|r_\chi\| \geq \frac{\| \chi f \|_{\omega, K}}{\|f\|_{\omega, K}} \geq (1 - \varepsilon) \frac{\| \chi h \|_\omega}{\|g\|_\omega} \geq \frac{1 - \varepsilon}{\|\alpha\|} \frac{\| \chi g \|_\omega}{\|g\|_\omega} ,$$

et la démonstration s'achève comme ci-dessus, en remarquant que g et α sont choisies une fois pour toutes.

Remarquons que les conditions pour un compact d'être de type $\omega - M$ et d'être d'intérieur non vide ne sont pas comparables en général.

4. Algèbres avec poids sur des groupes localement isomorphes.

Soient G et G' deux groupes localement isomorphes, U et U' des voisinages de 0 dans G et G' , $\varphi : U \longrightarrow U'$ un homéomorphisme qui définit l'isomorphisme local considéré. Si K est un compact contenu dans U , on pose $K' = \varphi(K)$.

Nous désignerons par f et f' : soit un couple de fonctions à supports dans U et U' , telles que $f|_U = f'|_{U'} \circ \varphi$, soit un couple de fonctions définies sur K et K' , telles que $f = f' \circ \varphi|_K$ (fonctions à valeurs complexes).

De même, μ et μ' désignent deux mesures à supports dans U et U' qui se correspondent par φ .

Γ et Γ' étant les duals de G , G' , ω et ω' désignent des poids réguliers, que nous choisissons continus, sur Γ et Γ' respectivement, se correspondant ainsi que l'indique le théorème 1 c'est-à-dire que l'un peut être construit à partir de l'autre comme il est indiqué en 2.2, 2.3 et 2.4.

4.1.

THEOREME 8. — *Soient K un compact contenu dans U , $K' = \varphi(K)$. Avec les notations ci-dessus l'application $\mu \longrightarrow \mu'$ de $M_\omega(K)$ sur $M_{\omega'}(K')$ est un isomorphisme topologique d'espaces vectoriels normés, pour les normes $\|\mu\|_{1/\omega}$ et $\|\mu'\|_{1/\omega'}$.*

Pour des poids ω et ω' constants, ceci est établi dans [5].

Il suffit de démontrer ce théorème dans les deux cas particuliers :

a) G' sous-groupe ouvert de G

b) G' quotient de G par un sous-groupe discret.

a) G' sous-groupe ouvert de G : alors $\Gamma' = \Gamma/\Lambda$, Λ compact. On peut supposer, en appelant α la surjection canonique $\Gamma \longrightarrow \Gamma'$, que $\omega = \omega' \circ \alpha$. Comme $\hat{\mu} = \hat{\mu}' \circ \alpha$, il en résulte

$$\frac{\hat{\mu}}{\omega} = \frac{\hat{\mu}'}{\omega'} \circ \alpha,$$

donc

$$\|\mu\|_{1/\omega} = \|\mu'\|_{1/\omega'}.$$

L'application considérée est une isométrie.

b) $G' = G/N$, N discret ; alors Γ' est un sous-groupe de Γ et Γ/Γ' est compact. On peut supposer que $\omega' = \omega|_{\Gamma'}$; comme $\hat{\mu}' = \hat{\mu}|_{\Gamma'}$, on a

$$\frac{\hat{\mu}'}{\omega'} = \frac{\hat{\mu}}{\omega} \Big|_{\Gamma'}.$$

On a donc évidemment $\|\mu'\|_{1/\omega'} \leq \|\mu\|_{1/\omega}$.

Réciproquement, montrons l'existence d'une constante k , indépendante de $\mu \in M_\omega(K)$, telle que $\|\mu\|_{1/\omega} \leq k \|\mu'\|_{1/\omega'}$.

Il existe un compact P de Γ tel que $\Gamma = \Gamma' - P$.

Soit $\chi_0 \in \Gamma$, un point où $\left| \frac{\hat{\mu}}{\omega} \right|$ atteint (par exemple) la moitié de son maximum. On a $\chi_0 = \psi_0 - \lambda$, $\psi_0 \in \Gamma'$, $\lambda \in P$. Désignons par $a(x)$ la fonction définie sur K par $a_\lambda(x) = (\lambda, x)$, c'est-à-dire la restriction à K du caractère λ , et par ν la mesure $a_\lambda \mu = \nu \in M_\omega(K)$; on a

$$\hat{\nu}(\chi) = \hat{\mu}(\chi - \lambda)$$

et

$$\begin{aligned} \|\mu\|_{1/\omega} &= 2 \left| \frac{\hat{\mu}(\chi_0)}{\omega(\chi_0)} \right| = 2 \left| \frac{\hat{\nu}(\chi_0 + \lambda)}{\omega(\chi_0 + \lambda)} \right| \frac{\omega(\chi_0 + \lambda)}{\omega(\chi_0)} \\ &\leq 2 \omega(\lambda) \left| \frac{\hat{\nu}'(\psi_0)}{\omega'(\psi_0)} \right| \leq A \|\nu'\|_{1/\omega'} \end{aligned}$$

en posant $A = 2 \sup_{\lambda \in P} \omega(\lambda)$.

Reste à montrer qu'il existe une constante B telle que

$$\|\nu'\|_{1/\omega'} = \|a'_\lambda \mu'\|_{1/\omega'} \leq B \|\mu'\|_{1/\omega'}.$$

Pour cela, il suffit de trouver, pour tout $\lambda \in P$, une fonction

$$h'_\lambda \in A_{\omega'}(G'),$$

telle que $\|h'_\lambda\|_{\omega'} \leq B$ pour tout $\lambda \in P$, et qui coïncide avec a'_λ sur K' .

Considérons le poids $\check{\omega}(\chi) = \omega(-\chi)$. Si $f' \in A(G')$, dire que $f' \in A_{\omega'}(G')$ équivaut à dire que $\hat{f}' \check{\omega}' \in L^1(\Gamma')$, et $\|f'\|_{\omega'} = \|\hat{f}' \check{\omega}'\|_1$.

Soit alors V' un voisinage de 0 dans G' , d'adhérence compacte, tel que

$$\left\{ \begin{array}{l} V' \subset U' \text{ et } K' - V' \subset U', \\ \forall \lambda \in P, \forall x' \in V', \operatorname{Re}(\lambda, x) > \frac{1}{2}, \text{ avec } x = \varphi^{-1}(x') \in U. \end{array} \right.$$

Le poids ω' étant régulier, il existe une fonction $u' \in A_{\omega'}(G')$ non nulle, ≥ 0 , à support dans V' ; soit $v'_\lambda(x') = (\lambda, \varphi^{-1}(x'))$ sur $K' - V'$, 0 hors de $K' - V'$. On a alors, en posant $h' = u' * v'_\lambda$,

$$h'(x') = \int_{V'} u'(y') v'_\lambda(x' - y') dy' = \hat{u}(\lambda) a'_\lambda(x') \quad \text{si } x' \in K'.$$

Or V' est choisi de telle sorte que $\hat{u}(\lambda)$ ne s'annule pas si $\lambda \in P$.

Posons

$$h'_\lambda = \frac{u' * v'_\lambda}{\hat{u}(\lambda)}, \quad \text{d'où} \quad \hat{h}'_\lambda = \frac{1}{\hat{u}(\lambda)} \hat{u}' v'_\lambda;$$

comme $\hat{u}' \check{\omega}' \in L^1(\Gamma')$, $\|\hat{u}' \check{\omega}'\|_1 = \|u'\|_{\omega'}$, il en résulte que

$$h'_\lambda \in A_{\omega'}(G') \quad , \quad \|h'_\lambda\|_{\omega'} \leq \frac{m(K' - V')}{\inf_{\lambda \in P} |\hat{u}(\lambda)|} \|u'\|_{\omega'} = B.$$

Ceci achève la démonstration du théorème.

4.2. Nous pouvons maintenant établir le principal résultat que nous avons en vue.

THEOREME 9. — Soient G et G' deux groupes localement isomorphes, U et U' des voisinages de 0 dans G et G' , $\varphi : U \longrightarrow U'$ un homéomorphisme définissant l'isomorphisme local.

A tout poids régulier ω sur le dual Γ de G on peut associer un poids ω' sur le dual Γ' de G' , unique à une équivalence près, tel que si $K \subset U$ est compact, $K' = \varphi(K)$, les conditions

$$f \in S_\omega(K)$$

$$f' \in S_{\omega'}(K')$$

soient équivalentes (avec $f' = f \circ \varphi^{-1}$ sur K' , 0 hors de K').

De plus l'isomorphisme d'algèbres $f \longrightarrow f'$ de $S_\omega(K)$ sur $S_{\omega'}(K')$ est continu pour les normes $\|f\|_\omega$ et $\|f'\|_{\omega'}$.

Montrons d'abord que le poids ω' construit à partir de ω selon la méthode employée en 2.2, 2.3 et 2.4 convient.

Soit V un voisinage de K contenu dans U , et soit $f \in S_\omega(K)$; l'application $\mu' \longrightarrow \mu$ de $M_{\omega'}(V')$ sur $M_\omega(V)$ est continue (th. 8), l'application $\mu \longrightarrow f\mu$ de $M_\omega(V)$ dans $M_\omega(V)$ est continue (th. 3.a), l'application $\nu \longrightarrow \nu'$ de $M_\omega(V)$ dans $M_{\omega'}(V')$ est continue (th. 8) donc leur composée $\mu' \longrightarrow (f\mu)' = f'\mu'$ est continue, ce qui entraîne que $f' \in S_{\omega'}(K')$ d'après le théorème 3.a).

Donc l'application $f \longrightarrow f'$ transforme $S_\omega(K)$ en $S_{\omega'}(K')$. Comme $S_{\omega'}(K')$ est une algèbre de Banach semi-simple, cette application est continue. D'ailleurs la continuité peut aussi s'obtenir en appliquant les théorèmes 8 et 3.b).

Montrons maintenant l'unicité de ω' ; soit ω'' un poids ayant les mêmes propriétés. Alors les algèbres $S_{\omega'}(K')$ et $S_{\omega''}(K')$ sont isomorphes ; plus précisément, $f' \in S_{\omega''}(K')$ si et seulement si $f' \in S_{\omega'}(K')$ et, d'après la semi-simplicité, il existe des constantes A et B telles que

$$A \|f'\|_{\omega''} \leq \|f'\|_{\omega'} \leq B \|f'\|_{\omega''}.$$

Soit $\chi' \in \Gamma'$ un caractère quelconque. D'après le théorème 6, il existe une constante a indépendante de χ' et un élément g' de $S_{\omega''}(K')$ tels que

$$a \omega''(\chi') \|g'\|_{\omega''} \leq \|\chi' g'\|_{\omega''},$$

d'où

$$\begin{aligned} a A \omega''(\chi') \|g'\|_{\omega''} &\leq A \|\chi' g'\|_{\omega''} \leq \|\chi' g'\|_{\omega'} \leq \omega'(\chi') \|g'\|_{\omega'} \\ &\leq B \omega'(\chi') \|g'\|_{\omega''}, \end{aligned}$$

ce qui montre l'équivalence des poids ω' et ω'' .

Du théorème 9, nous déduisons le corollaire suivant :

THEOREME 10. — Avec les notations du théorème 9, le poids ω' associé à ω est tel que les conditions

$$f \in A_\omega(K)$$

$$f' \in A_{\omega'}(K')$$

soient équivalentes. De plus l'application $f \longrightarrow f'$ de $A_\omega(K)$ sur $A_{\omega'}(K')$ est continue pour les normes $\|f\|_{\omega, K}$ et $\|f'\|_{\omega', K'}$.

Il suffit d'appliquer le théorème 9 en prenant un voisinage compact K_1 de K et $g \in S_\omega(K_1)$, prolongement de f . La continuité s'obtient par la semi-simplicité des algèbres $A_\omega(K)$ et $A_{\omega'}(K')$.

4.3. Nous sommes maintenant en mesure d'achever la démonstration du théorème 1. Avec les notations introduites, désignons par $\rho_{\Gamma, \Gamma'}^*(\omega)$ le poids régulier ω' associé au poids régulier ω par le théorème 9.

Il est clair que $\rho_{\Gamma, \Gamma'}^*$ est compatible avec les relations d'équivalence et définit une bijection, encore notée $\rho_{\Gamma, \Gamma'}^*$, de $\Omega(\Gamma)$ sur $\Omega(\Gamma')$.

La propriété c) de transitivité est manifestement remplie et dans les cas particuliers a) et b) $\rho_{\Gamma, \Gamma'}^*$ a justement été construite de façon à satisfaire les conditions correspondantes a) et b). Ceci montre l'existence d'une famille d'applications ayant les propriétés a) b) c). D'autre part, le fait que dans chaque cas particulier, on puisse construire $\rho_{\Gamma, \Gamma'}^*$ en appliquant a) b) et c) et la propriété d'unicité du théorème 9 démontrent la propriété d'unicité du théorème 1.

BIBLIOGRAPHIE

- [1a] BOURBAKI, Topologie générale, chapitre 3, Hermann, Paris.
- [1b] BOURBAKI, Topologie générale, chapitre 7, Hermann, Paris.
- [2] DOMAR, Harmonic Analysis based on certain commutative Banach Algebras, *Acta Mathematica*, vol. 96, (1956).
- [3] PONTRJAGIN, Topological Groups, *Princeton University Press*, (1945).
- [4] RUDIN, Fourier Analysis on Groups, Interscience Publishers, New York, (1962).

- [5] SPECTOR, Espaces de mesures et de fonctions invariants par les isomorphismes locaux de groupes abéliens localement compacts, *Annales de l'institut Fourier*, tome XV, n° 2, (1965).

Manuscrit reçu le 30 août 1968,

René SPECTOR

Département de Mathématiques

Faculté des Sciences

91 – Orsay