ANNALES DE L'INSTITUT FOURIER

WILHELM KAUP

Hyperbolische komplexe Raüme

Annales de l'institut Fourier, tome 18, nº 2 (1968), p. 303-330

<http://www.numdam.org/item?id=AIF_1968__18_2_303_0>

Ann. Inst. Fourier, Grenoble
18, 2 (1968), 303-330.

HYPERBOLISCHE KOMPLEXE RÄUME

von Wilhelm KAUP

Herrn Heinrich Behnke zum 70. Geburstag gewidmet

Einleitung und Inhalt.

In der Funktionentheorie einer komplexen Veränderlichen ist es üblich, die Riemannschen Flächen in drei Klassen einzuteilen, je nachdem nämlich, ob die universelle Überlagerung (a) die *Riemannsche Zahlenkugel*, (b) die *komplexe Zahlenebene* $\mathbf{C}$ oder (c) der *Einheitskreis* $\mathbf{E}$ ist. Diese Einteilung ist in dem charakteristischen Verhalten der Flächen einer jeden Klasse begründet (vergl. [1]).

Eine entsprechende Einteilung nach der universellen Überlagerung ist in höheren Dimensionen nicht sinnvoll, denn schon die Menge der Äquivalenzklassen einfach-zusammenhängender Gebiete im $\mathbf{C}^n$ ist unüberschaubar. In der vorliegenden Arbeit soll nun gezeigt werden, daß eine große Klasse komplexer Räume existiert, die in ihrem Abbildungsverhalten mit den hyperbolischen Riemannschen Flächen (Fall (*c*)) übereinstimmen : Betrachten wir für alle komplexen Räume X und Y die durch $(x, f) \to (x, fx)$ definierte kanonische Abbildung $\Phi : X \times \mathrm{Hol}(X, Y) \to X \times Y$, wobei Hol(X, Y) die mit der Topologie der kompakten Konvergenz versehene Menge aller holomorphen Abbildungen $X \to Y$ ist. Φ ist stetig und sogar holomorph, wenn X kompakt ist (vergl. [8]). Ein besonderer Fall liegt vor, wenn die Abbildung Φ kompakt ist; dann ist das Bild einer jeden abgeschlossenen (bzw. analytischen) Teilmenge wieder abgeschlossen (bzw. analytisch).

Im Falle abzählbarer Topologie ist die Kompaktheit von Φ zudem äquivalent dazu, daß $\mathrm{Hol}(X, Y)$ eine normale Familie holomorpher Abbildungen darstellt (d. h. jede diskrete Punktfolge in $\mathrm{Hol}(X, Y)$ konvergiert gegen den idealen Rand von Y; vergl. [11]). Es wird nun definiert: Y *heißt hyperbolisch, wenn die kanonische Abbildung* Φ *für jeden zusammenhängenden komplexen Raum* X *kompakt ist.* Die in [17] bzw. [22] definierten hyperbolischen komplexen Räume ordnen sich dieser Definition unter.

Ein komplexer Raum Y ist z.B. dann hyperbolisch, wenn eine der folgenden Bedingungen erfüllt ist:

1. Die universelle Überlagerung von Y ist hyperbolisch.

2. Y ist homogen (oder auch Überlagerung eines kompakten Raumes) und besitzt hinreichend viele beschränkte holomorphe Funktionen (genauer: Y ist beschränkt K vollständig).

3. Y ist ein relativ-kompaktes streng pseudo-konvexes Gebiet in einer K-vollständigen komplexen Mannigfaltigkeit.

4. Auf dem Einheitskreis $\mathbf{E}$ existiert eine stetige Metrik D und auf Y eine vollständige stetige Metrik d mit $d(fz, fw) \leqslant D(z, w)$ für alle $z, w \in \mathbf{E}$ und alle holomorphen Abbildungen $f: \mathbf{E} \to Y$.

Ferner ist ein holomorphes Faserbündel genau dann hyperbolisch, wenn Faser und Basis hyperbolisch sind.

Als nützlich erweist sich die folgende Abschwächung des Begriffes « hyperbolisch »: Ein komplexer Raum Y mit Einpunktkompaktifizierung Y′ heißt *schwach hyperbolisch*, wenn für jeden komplexen Raum X die Menge $\mathrm{Hol}(X, Y)$ relativ-kompakt in der Menge aller stetigen Abbildungen $X \to Y'$ liegt. Ein komplexer Raum, dessen universelle Überlagerung beschränkt K-vollständig ist, besitzt z.B. diese Eigenschaft. In Bezug auf holomorphe Abbildungen verhalten sich schwach hyperbolische Räume wie beschränkte Gebiete im $\mathbf{C}^n$; so überträgt sich etwa der Cartansche Beweis dafür, daß die Automorphismengruppe eines beschränkten Gebietes im $\mathbf{C}^n$ eine eigentlich operierende Liegruppe ist.

Für holomorphe Abbildungen in hyperbolische Räume wird eine Reihe von Endlichkeitsaussagen beweisen, von denen nur die folgende angeführt werden möge: Die Automorphismengruppe eines kompakten hyperbolischen Raumes Y ist endlich, und jede holomorphe Abbildung von Y auf sich ist ein Automorphismus. Eine entsprechende Aussage ist für kompakte komplexe Mannigfaltigkeiten mit negativer erster Chernscher Klasse bekannt (vergl. [19, 21]). Es bleibt offen, inwieweit Mannigfaltigkeiten mit negativer Chernscher Klasse hyperbolisch sind.

Es sei mir gestattet, J.L. Koszul und R. Narasimhan für das Interesse an der Arbeit zu danken; in gleicher Weise fühle ich mich A. Andreotti verpflichtet für einen Gastaufenthalt in Pisa, wo ein Teil der Arbeit in der vorliegenden Form entstand.

Inzwischen wurde mir von J. L. Koszul und J. Vey mitgeteilt, daß innerhalb der Kategorie der lokal-affinen Riemannschen Mannigfaltigkeiten der Begriff «hyperbolisch» wie im holomorphen Fall eingeführt werden kann und dort z.T. zu analogen Resultaten führt.

1. Vorbereitungen und Bezeichnungen.

Für je zwei lokal-kompakte topologische Räume A und B sei $\mathfrak{C}(A, B)$ die Menge aller stetigen Abbildungen $A \to B$ versehen mit der KO-Topologie (auch Topologie der kompakten Konvergenz genannt; das ist die gröbste Topologie, so daß für jedes Kompaktum $K \subset A$ und jedes offene $O \subset B$ die Menge $\{f \in \mathfrak{C}(A, B) : f(K) \subset O\}$ offen ist). $\mathfrak{C}(A, B)$ ist ein Hausdorffraum, der abzählbare Topologie besitzt, wenn A und B abzählbare Topologie besitzen. Für jeden weiteren Raum C ist die Kompositionsabbildung

$$\mathfrak{C}(A, B) \times \mathfrak{C}(B, C) \to \mathfrak{C}(A, C)$$

stetig. Ohne daß im folgenden jeweils darauf hingewiesen wird, sei auch jede Teilmenge $F \subset \mathfrak{C}(A, B)$ stets mit der KO-Topologie versehen.

Sind X, Y reduzierte komplexe Räume (vergl. [10]), so werde mit $\mathrm{Hol}(X, Y)$ die Menge aller holomorphen Abbildungen $X \to Y$ bezeichnet. $\mathrm{Hol}(X, Y)$ ist ein abgeschlossener Unterraum von $\mathfrak{C}(X, Y)$. Jede holomorphe Abbildung

$f: X \to Y$ induziert durch $f^*(g) = gf$ eine stetige Abbildung $f^*: \mathrm{Hol}(Y, Z) \to \mathrm{Hol}(X, Z)$ und durch $f_*(g) = fg$ eine stetige Abbildung $f_*: \mathrm{Hol}(Z, X) \to \mathrm{Hol}(Z, Y)$. Ist X kompakt, so trägt Hol(X, Y) nach Douady [8] eine komplexe Struktur, die durch eine gewisse universelle Eigenschaft eindeutig bestimmt ist. So ist etwa für jeden kompakten komplexen Raum Z die Kompositionsabbildung

$$\mathrm{Hol}(X, Z) \times \mathrm{Hol}(Z, Y) \to \mathrm{Hol}(X, Y)$$

holomorph. Besteht X aus genau einem Punkt, so kann Hol(X, Y) mit Y identifiziert werden. Für jede lokal-analytische Teilmenge $A \subset X$ werde mit $i_A: A \to X$ die kanonische holomorphe Injektion bezeichnet. $i_A^*: \mathrm{Hol}(X, Y) \to \mathrm{Hol}(A, Y)$ ist dann die zugehörige *Beschränkungsabbildung*; für jeden Punkt $x \in X$ heißt $i_x^*: \mathrm{Hol}(X, Y) \to Y$ die *Einsetzungsabbildung.*

Für jeden nicht-kompkaten komplexen Raum Y sei Y′ die Einpunktkompaktifizierung von Y; ist Y kompakt, so sei $Y' = Y$. Y′ besitzt narürlich im allgemeinen keine komplexe Struktur. Wir setzen nun

Definition 1.1. — *Ein komplexer Raum* Y *heißt schwach hyperbolisch, wenn für jeden komplexen Raum* X *gilt: Die Menge*

$$\mathrm{Hol}(X, Y') := \{f \in \mathfrak{C}(X, Y') : f \in \mathrm{Hol}(X, Y) \textit{ oder } f(X) \cap Y = \emptyset\}$$

liegt relativ-kompakt in $\mathfrak{C}(X, Y')$.

Beispiele für schwach hyperbolische Räume erhalten wir mit Hilfe des folgenden Begriffs (vergl. [16]): Ein komplexer Raum X heißt *beschränkt* K-*vollständig*, wenn zu jeder nicht-diskreten Teilmenge $\Delta \subset X$ eine beschränkte holomorphe Funktion auf X existiert, die auf Δ nicht konstant ist. Beschränkte Gebiete über dem $\mathbf{C}^n$ besitzen z.B. diese Eigenschaft. Ist X beschränkt K-vollständig, so auch jede Überlagerung von X. Es gilt nun.

Satz 1.2. — *Ist die universelle Überlagerung* $\tilde{Y}$ *von* Y *beschränkt* K-*vollständig, so ist* Y *schwach hyperbolisch.*

Beweis. — Es sei $\mathbf{E} := \{z \in \mathbf{C} : |z| < 1\}$ der Einheitskreis in der komplexen Zahlenebene $\mathbf{C}$ und S ein beliebiger komplexer Raum. c_S sei die durch

$$c_S(z, w) := \sup_{f \in \mathrm{Hol}(S, \mathbf{E})} |f(z) - f(w)|$$

für alle $z, w \in S$ definierte Carathéodory-Pseudometrik ([16; 23]) auf S. c_S ist stetig. Sei ferner $Z_\varepsilon(z)$ für jedes $z \in S$ und $\varepsilon \leqslant 2$ die z-Zusammenhangskomponente der Pseudokugel $\{w \in S : c_S(z, w) < \varepsilon\}$; für $\varepsilon > 2$ sei $Z_\varepsilon(z) = S$. Dann wird durch

$$\rho_S(z, w) := \inf \{\varepsilon > 0 : z \in Z_\varepsilon(w) \quad \text{und} \quad w \in Z_\varepsilon(z)\}$$

eine stetige Pseudometrik ρ_S auf S definiert. Ist $\tau : \tilde{S} \to S$ die universelle Überlagerung von S, so erhalten wir in gleicher Weise eine stetige Pseudometrik $\rho_{\tilde{S}}$ auf $\tilde{S}$ und durch

$$\sigma_S(z, w) := \rho_{\tilde{S}}(\tau^{-1}(z), \tau^{-1}(w))$$

eine weitere Pseudometrik σ_S auf S. Für jeden komplexen Raum X, jedes $f \in \mathrm{Hol}(X, Y)$ und alle $x, y \in X$ gilt dabei

$$(*) \qquad \sigma_Y(fx, fy) \leqslant \sigma_X(x, y),$$

da eine entsprechende Kontraktionseigenschaft für c_S und damit auch für ρ_S gilt ([17]). Die Gruppe

$$\Gamma := \{g \in \mathrm{Aut}(\tilde{S}) : \tau g = \tau\}$$

aller Decktransformationen läßt die Pseudometrik $\rho_{\tilde{S}}$ invariant und operiert eigentlich diskontinuierlich auf $\tilde{S}$. Daraus folgt: (1) σ_S ist stetig für alle S; (2) σ_Y ist eine Metrik auf Y, die mit der Topologie von Y verträglich ist (denn $\rho_{\tilde{Y}}$ ist eine mit der Topologie von $\tilde{Y}$ verträgliche Metrik). Für jedes $A \subset X, B \subset Y$ und $r > 0$ sei

$$\mathbf{B}_r(A) := \{x \in X : \sigma_X(x, A) < r\}$$

und

$$\mathbf{B}_r(B) := \{y \in Y : \sigma_Y(y, B) < r\}.$$

Es sei $\mathfrak{F}$ ein Ultrafilter auf $\mathrm{Hol}(X, Y')$. Es gibt eine Abbildung $f : X \to Y'$, so daß für jedes $x \in X$ die Ultrafilterbasis $\mathfrak{F}(x) := i_x^*(\mathfrak{F})$ in Y' konvergiert. Zum Beweis, daß $f = \lim \mathfrak{F} \in \mathfrak{C}(X, Y')$ gilt, genügt es offenbar für jedes $x \in X$ und jede Umgebung V von $f(x)$ in Y' zu zeigen: Es gibt eine Umgebung U von x und ein $F \in \mathfrak{F}$ mit $F(U) \subset V$. 1. Fall: $f(x) \in Y$. Dann wählen wir ein $\varepsilon > 0$ mit $\mathbf{B}_{2\varepsilon}(f(x)) \subset V$ und ein $F \in \mathfrak{F}$ mit $F(x) \subset \mathbf{B}_\varepsilon(f(x))$. Für $U := \mathbf{B}_\varepsilon(x)$ gilt dann wegen (*) $F(U) \subset V$. 2. Fall: $f(x) \notin Y$. Wir wählen ein $r > 0$ so, daß $W := \mathbf{B}_r(Y' - V)$ relativ-kompakt in Y liegt. Ferner ein $F \in \mathfrak{F}$ mit $F(x) \cap \overline{W} = \emptyset$. Dann gilt

$F(U) \cap (Y' - V) = \emptyset$ für $U := \mathbf{B}_r(x)$, d.h. $F(U) \subset V$. Q.e.d.

Jeder komplexe Raum, der eine stark negativ gekrümmte Differentialmetrik tragen kann (vergl. [11; 22]; in [22] werden solche Räume quasi-hyperbolisch genannt), ist ebenfalls schwach hyperbolisch. Daß jedes beschränkte Gebiet $G \subset \mathbf{C}^n$ schwach hyperbolisch ist, kann mit dem Satz von Montel natürlich auch direkt eingesehen werden. Schwach hyperbolische Räume verhalten sich andererseits in vieler Hinsicht ähnlich wie beschränkte Gebiete im $\mathbf{C}^n$. So überträgt sich z.B. der Cartansche Beweis dafür, daß die Automorphismengruppe eines beschränkten Gebiets eine reelle Liegruppe ist. Der Vollständigkeit halber soll das im folgenden durchgeführt werden; für jeden komplexen Raum Y sei dabei $\mathrm{Aut}(Y) \subset \mathrm{Hol}(Y, Y)$ die Gruppe aller Automorphismen von Y.

Satz 1.3. — *Ist* Y *ein irreduzibler schwach hyperbolischer Raum der komplexen Dimension* n, *so ist* $\mathrm{Aut}(Y)$ *eine Liegruppe der (reellen) Dimension* $\leqslant n(n+2)$, *die eigentlich auf* Y *operiert (vergl.* [16]).

Beweis. — Wir führen den Beweis nur für den Fall abzählbarer Topologie. Sei also (f_n) eine Folge in $\mathrm{Aut}(Y)$ so, daß für ein $y \in Y$ die Punktfolge $(f_n y)$ in Y konvergiert. Es genügt wegen [16] zu zeigen, daß (f_n) eine in $\mathrm{Aut}(Y)$ konvergente Teilfolge besitzt. Dazu dürfen wir annehmen, daß Elemente $f, g, h, h_m \in \mathfrak{C}(Y, Y')$ existieren mit $f = \lim f_n$, $g = \lim f_n^{-1}$, $h_m = \lim\limits_{n \to \infty} f_m^{-1} f_n$ für alle $m > 0$ und $h = \lim h_m$. Nach Voraussetzung ist die offene Menge $U := f^{-1}(Y)$ nicht leer.

Für alle $x \in \mathrm{U}$ und $m > 0$ ist $h_m(x) = f_m^{-1}(f(x))$, d.h. im Limes $hi_{\mathrm{U}} = gfi_{\mathrm{U}}$. Offensichtlich gilt nun $hi_{\mathrm{U}} = i_{\mathrm{U}}$. Da Y irreduzibel ist, folgt daraus $h = i_{\mathrm{Y}}$. Angenommen, es gibt eine Folge (x_n) in U, die gegen ein $x \in \mathrm{Y} - \mathrm{U}$ konvergiert. Dann ist $f(x) \notin \mathrm{Y}$, und wegen $h_m(x_n) = f_m^{-1}(f(x_n))$ gilt auch $h_m(x) \notin \mathrm{Y}$ für alle m. Wegen $\lim h_m(x) = x \in \mathrm{Y}$ ist das jedoch nicht möglich, und es folgt $\mathrm{U} = \mathrm{X}$. Also ist $gf = i_{\mathrm{Y}}$. Analog folgt $fg = i_{\mathrm{Y}}$, d.h. $f \in \mathrm{Aut}(\mathrm{Y})$. Q.e.d.

Für jeden schwach hyperbolischen Raum Y gilt weiter.

Bemerkung 1.4. — *Ist* G *eine zusammenhängende komplexe Liegruppe, so ist jede holomorphe Abbildung* $\mathrm{G} \to \mathrm{Y}$ *konstant.*

Beweis. — Wegen der Existenz genügend vieler einparametriger Untergruppen von G genügt es, 1.4 für den Spezialfall zu beweisen, daß $\mathrm{G} = \mathbf{C}$ die komplexe Zahlengerade ist. Sei also $f : \mathbf{C} \to \mathrm{Y}$ holomorph. Für feste Punkte $z, w \in \mathbf{C}$ betrachten wir die Folge (f_n) in $\mathrm{Hol}(\mathbf{C}, \mathrm{Y}')$ definiert durch

$$f_n(x) = f(z + nx(w - z)).$$

Wegen $f_n(0) = f(z)$ konvergiert eine Teilfolge $(f_n)_{n \in \mathrm{T}}$ gegen ein $\varphi \in \mathbf{C}(\mathbf{C}, \mathrm{Y}')$ mit $\varphi(0) = f(z)$, d.h.

$$f(w) = \lim f_n\left(\frac{1}{n}\right) = \lim f_n(0) = f(z), \quad \text{d.h.} \quad f$$

ist konstant.

Folgerung 1.5. — *Ist* Y *schwach hyperbolisch, so ist jede komplexe Liegruppe* G, *die holomorph und effektiv auf* Y *operiert* ([16]), *diskret.*

Beweis. — Für jeden Punkt $y \in \mathrm{Y}$ liefert $g \to g(y)$ eine holomorphe — und damit also lokal-konstante — Abbildung $\mathrm{G} \to \mathrm{Y}$.

Aus 1.2 und 1.4 zusammen folgt weiter: *Eine Riemannsche Fläche* Y *ist genau dann schwach hyperbolisch, wenn die universelle Überlagerung von* Y *der Einheitskreis* **E** *ist* (d.h. *wenn* Y *eine Fläche von hyperbolischem Typ ist*).

2. Definition hyperbolischer Räume.

Es sei X ein zusammenhängender komplexer Raum und Y ein beliebiger komplexer Raum. Man überlegt sich leicht die Äquivalenz der folgenden Aussagen:

(a) *Die durch* $\Phi(x, f) = (x, f(x))$ *definierte stetige Abbildung*

$$\Phi : X \times \mathrm{Hol}(X, Y) \to X \times Y$$

ist kompakt (d.h. *Urbilder kompakter Mengen sind kompakt*),

(b) *Für jedes Kompaktum* $K_1 \subset X$ *und jedes Kompaktum* $K_2 \subset Y$ *ist*

$$\{f \in \mathrm{Hol}(X, Y) : f(K_1) \cap K_2 \neq \emptyset\}$$

kompakt,

(c) $\mathrm{Hol}\,(X, Y')$ *ist kompakt.*

Definition 2.1. — Y *heißt* X-*hyperbolisch, wenn eine der vorstehenden* (*äquivalenten*) *Bedingungen erfüllt ist.*

Es ergeben sich unmittelbar

Folgerung 2.2. — *Ist* Y X-*hyperbolisch, so ist Hol*(X, Y) *lokal-kompakt.*

Folgerung 2.3. — *Ist* X *kompakt und ist* Y *projektiv-algebraisch und* X-*hyperbolisch, so ist auch* $\mathrm{Hol}(X, Y)$ *projektiv-algebraisch.*

Beweis. — Y ist kompakt, also ist $\mathrm{Hol}(X, Y)$ ein kompakter komplexer Raum. Die Teilmenge

$$\{i_x^* : x \in X\} \subset \mathrm{Hol}(\mathrm{Hol}(X, Y), Y)$$

trennt die Punkte von $\mathrm{Hol}(X, Y)$, d.h. es existiert eine injektive holomorphe Abbildung $\tau : \mathrm{Hol}(X, Y) \to Y^n$ für ein geeignetes n.

Folgerung 2.4. — *Ist* Y X-*hyperbolisch und* $K \subset X$ *kompakt, so ist die durch* $\varphi(f, x) = f(x)$ *definierte Abbildung*

$$\varphi : \mathrm{Hol}(X, Y) \times K \to Y$$

kompakt. Ist speziell X *kompakt und sind* $T \subset \mathrm{Hol}(X, Y)$,

$K \subset X$ *analytische Teilmengen, so ist auch*

$$T(K) := \varphi(T \times K)$$

analytisch in Y (folgt *aus dem Remmertschen Abbildungssatz,* [24]).
Beispiele für X-hyperbolische Räume erhalten wir durch :

Bemerkung 2.5. — *Existiert auf* X *eine stetige Pseudometrik* D *und auf* Y *eine vollständige stetige Metrik* d *mit*

$$(*) \qquad d(fx, fy) \leqslant D(x, y)$$

für alle $x, y \in X$ *und* $f \in \mathrm{Hol}(X, Y)$, *so ist* Y X-*hyperbolisch.*

Beweis. — Es sei $\mathfrak{F}$ ein Ultrafilter auf Hol(X, Y′). Wie im Beweis von 1.2 zeigt man, daß $\mathfrak{F}$ gegen ein $f \in \mathfrak{C}(X, Y')$ konvergiert. Es genügt zu zeigen, daß $f \in \mathrm{Hol}(X, Y')$ gilt, d.h. daß $U = f^{-1}(Y)$ abgeschlossen in X ist. Ist (x_n) eine Punktfolge in U mit $x = \lim x_n \in X$, so ist $\mathfrak{F}(x_n)$ für jedes n ein Cauchy filter. Wegen $(*)$ ist dann auch $\mathfrak{F}(x)$ ein Cauchyfilter in Y, d.h. $x \in U$ und somit $U = X$.

Wir setzen nun :

Definition 2.6. — *Ein komplexer Raum* Y *heißt hyperbolisch, wenn er* X-*hyperbolisch für jeden zusammenhängenden komplexen Raum* X *ist.*

Bezeichnen wir mit $\mathbf{E}^n$ das n-fache direkte Produkt des Einheitskreises $\mathbf{E}$ mit sich selbst, so gilt :

Bemerkung 2.7. — *Ein komplexer Raum* Y *ist bereits dann hyperbolisch, wenn er* $\mathbf{E}^n$-*hyperbolisch für jedes* n *ist.*

Beweis. — Es sei X ein zusammenhängender komplexer Raum und $\mathfrak{F}$ ein Ultrafilter auf Hol(X, Y′). Es genügt zu zeigen, daß jeder Punkt $x \in X$ eine Umgebung U besitzt, so daß $\mathfrak{F}|U := i_U^*(\mathfrak{F})$ in Hol(X, Y′) konvergiert. Ist X eine komplexe Mannigfaltigkeit, so ist das klar, da dann jeder Punkt eine Umgebung besitzt, die zu einem $\mathbf{E}^n$ äquivalent ist. Der allgemeine Fall kann darauf zurückgeführt werden, denn zu jedem Punkt $x \in X$ existiert eine Umgebung U, eine komplexe Mannigfaltigkeit V und eine kompakte holomorphe Abbildung τ von V auf U (nach Hironaka kann τ sogar ausserhalb einer dünnen analytischen Menge biholomorph gewählt werden; wir nützen das jedoch nicht aus). Die Ultrafilterbasis $\tau^*(\mathfrak{F}|U)$ konvergiert in $\mathrm{Hol}(V, Y')$, d.h. auch $\mathfrak{F}|U$ konvergiert in $\mathrm{Hol}(U, Y')$. Q.e.d.

Ob ein komplexer Raum bereits dann hyperbolisch ist, wenn er nur $\mathbf{E}$-hyperbolisch ist, bleibt offen. Zumindest gilt:

Bemerkung 2.8. — *Ein komplexer Raum* Y *ist genau dann hyperbolisch, wenn er schwach hyperbolisch und* $\mathbf{E}$-*hyperbolisch ist.*

Beweis. — Sei Y schwach hyperbolisch und $\mathbf{E}$-hyperbolisch. Sei ferner $\mathfrak{F}$ ein Ultrafilter auf $\mathrm{Hol}(\mathbf{E}^n, Y')$, der gegen ein $f \in \mathfrak{C}(\mathbf{E}^n, Y')$ konvergiert. Angenommen, es gibt Punkte $z, w \in \mathbf{E}^n$ mit $f(z) \in Y$ und $f(w) \notin Y$. Ist dann $\tau : \mathbf{E} \to \mathbf{E}^n$ eine holomorphe Abbildung mit $z, w \in \tau(\mathbf{E})$, so ist $\tau^*(\mathfrak{F})$ eine Ultrafilterbasis, die in $\mathrm{Hol}(\mathbf{E}, Y')$ nicht konvergiert. Nach Voraussetzung ist das nicht möglich, d.h. $f \in \mathrm{Hol}(\mathbf{E}^n, Y')$.

Insbesondere ist also jedes beschränkte $\mathbf{E}$-hyperbolische Gebiet im $\mathbf{C}^n$ hyperbolisch. Weiter gilt:

Bemerkung 2.9. — *Ein beschränktes Gebiet* $G \subset \mathbf{C}^n$ *ist genau dann hyperbolisch, wenn jeder Randpunkt* $y \in \overline{G}$ *eine offene Umgebung* U *besitzt, so* daß $U \cap G$ *hyperbolisch ist.*

Beweis. — Sei (f_n) eine Folge holomorpher Abbildungen $\mathbf{E} \to G$, die gegen eine holomorphe Abbildung $f : \mathbf{E} \to \overline{G} \subset \mathbf{C}^n$ konvergiert. Angenommen, $y = f(x) \notin G$ für ein $x \in \mathbf{E}$. Dann gibt es eine zusammenhängende Umgebung V von x und eine offene Umgebung U von y in $\overline{G}$ mit $G \cap U$ hyperbolisch und $f_n(V) \subset U$ für $n \geqslant n_0$. Also gilt $f(V) \cap G = \emptyset$, d.h. $f^{-1}(G)$ ist abgeschlossen in $\mathbf{E}$.

Jede analytische Teilmenge eines hyperbolischen Raumes ist offensichtlich hyperbolisch und ebenso das direkte Produkt hyperbolischer Räume. Allgemeiner gilt:

Satz 2.10. — *Ein holomorphes Faserbündel ist genau dann hyperbolisch, wenn Faser und Basis hyperbolisch sind.*

Beweis. — Sei $\tau : Q \to B$ ein holomorphes Faserbündel mit typischer Faser F und Strukturgruppe G. Nehmen wir zunächst an, daß B und F hyperbolisch sind. Ist dann X zusammenhängend und $\mathfrak{F}$ ein Ultrafilter auf $\mathrm{Hol}(X, Q)$, so dürfen wir annehmen, daß $\tau_*(\mathfrak{F})$ gegen ein $f \in \mathrm{Hol}(X, B)$ konvergiert. Zu jedem $x \in X$ können wir also eine Umgebung U von x, eine Umgebung V von $f(x)$ und ein $T \in \mathfrak{F}$ mit $T(U) \subset \tau^{-1}(V) \approx V \times F$ wählen, d.h. $\mathfrak{F}|U$ konvergiert in $\mathrm{Hol}(U, Q')$, d.h. Q ist hyperbolisch. Nehmen wir nun umgekehrt an, daß Q hyperbolisch ist. Als Unterraum von Q ist dann natürlich auch F hyperbolisch. Es existiert ein kommutatives Diagramm

$$\begin{array}{ccc} \tilde{Q} & \xrightarrow{\tilde{\tau}} & \tilde{B} \\ \zeta \downarrow & & \downarrow \eta, \\ Q & \xrightarrow[\tau]{} & B \end{array}$$

wobei η die universelle Überlagerung von B, $\tilde{\tau}$ das vermöge η geliftete Bündel und ζ eine Überlagerungsabbildung ist. Mit Q ist also auch $\tilde{Q}$ hyperbolisch. Wegen 1.5 ist G diskret; es folgt $\tilde{Q} \approx \tilde{B} \times F$ und damit insbesondere, daß $\tilde{B}$ hyperbolisch ist. Zum Beweis, daß auch B hyperbolisch ist, betrachten wir für alle Kompakta $A \subset \mathbf{E}^n$, $K \subset B$ die Menge $(A, K) := \{f \in \mathrm{Hol}(\mathbf{E}^n, B) : f(A) \cap K \neq \emptyset\}$. $\tilde{K} \subset \tilde{B}$ sei ein Kompaktum mit $\tau(\tilde{K}) = K$. Die stetige Abbildung τ_* bildet die kompakte Menge $(A, \tilde{K}) \subset \mathrm{Hol}(\mathbf{E}^n, \tilde{B})$ auf die Menge (A, K) ab, d.h. (A, K) ist kompakt, d.h. B ist hyperbolisch.

Folgerung 2.10. — *Ein komplexer Raum* Y *ist genau dann hyperbolisch, wenn die universelle Überlagerung* $\tilde{Y}$ *hyperbolisch ist.*

Im Falle verzweigter Abbildungen läßt sich zeigen:

Bemerkung 2.11. — *Ist* Y *hyperbolisch und* $\tau : X \to Y$ *eine kompakte diskrete holomorphe Abbildung, so ist auch* X *hyperbolisch.*

Beweis. — Sei Z zusammenhängend und $\mathfrak{F}$ ein Ultrafilter auf $\mathrm{Hol}(Z, X)$. Wir dürfen annehmen, daß $\tau_*(\mathfrak{F})$ gegen ein $f \in \mathrm{Hol}(Z, Y)$ konvergiert. Sei $z \in Z$ beliebig und V eine Umgebung von $x := \lim \mathfrak{F}(z) \in X$. Wir wählen eine weitere Umgebung $U \subset V$ von x so, daß für jede zusammenhängende Menge $M \subset \tau^{-1}(\tau(U))$ gilt:

$$M \cap U \neq \emptyset \Longrightarrow M \subset V.$$

Es gibt nun eine zusammenhängende Umgebung W von z und ein $F \in \tilde{Y}$ mit $F(z) \subset U$ und $F(W) \subset \tau^{-1}(\tau(U))$, d.h. $F(W) \subset V$.

Insbesondere ist also die Normalisierung eines hyperbolischen Raumes wieder hyperbolisch.

Mit dem gleichen Argument wie in 2.11 folgt allgemeiner: *Existiert zu jedem Punkt* $x \in X$ *eine kompakte holomorphe Abbildung von* X *in einen hyperbolischen Raum, die in einer Umgebung von* x *diskret ist, so ist* X *hyperbolisch.* Für die Klasse der hyperbolischen Räume sind also die Bedingungen (P_1) und (P_2) aus ([6] p. 11, 12) erfüllt; nach Cartan [6] gilt also:

Satz 2.12. — *Es sei* X *ein komplexer Raum, der eine kompakte holomorphe Abbildung in einen hyperbolischen Raum gestattet* (z.B. wenn X kompakt ist). *Dann existiert ein hyperbolischer Raum* Y *und eine kompakte holomorphe Abbildung* τ *von* X *auf* Y *mit zusammenhängenden Fasern, die durch die folgende universelle Eigenschaft bis auf Isomorphie eindeutig bestimmt ist: Ist* Z *ein hyperbolischer Raum und* $\varphi : X \to Z$ *eine kompakte holomorphe Abbildung, so existiert eine holomorphe Abbildung* $\mu : Y \to Z$ *mit* $\mu\tau = \varphi$.

3. Verallgemeinerungen auf holomorphe G-Räume.

Es sei im folgenden G eine fest vorgegebene topologische Gruppe. Ein komplexer Raum X heißt ein *G-Raum* (*auch holomorpher G-Raum*), wenn ein stetiger Homomorphismus $\Phi : G \to \mathrm{Aut}(X)$ ausgezeichnet ist. Für jedes $g \in G$ ist dann also $\Phi(g)$ ein Automorphismus von X; zur Abkürzung schreiben wir auch einfach g statt $\Phi(g)$. X heißt ein *trivialer G-Raum*, wenn $gx = x$ für alle $g \in G$ und $x \in X$ gilt. Das direkte Produkt $X \times Y$ von G-Räumen ist wieder ein G-Raum, indem wir $g(x, y) = (gx, gy)$ setzen. Vermöge $f \to gfg^{-1}$ operiert G auch als Transformationsgruppe auf Hol(X, Y). Die Fixpunkte von G in Hol(X, Y) heißen *G-äquivariante Abbildungen*;

$$\mathrm{Hol}_G(X, Y) := \{f \in \mathrm{Hol}(X, Y) : gf = fg \text{ für alle } g \in G\}$$

sei die Menge aller G-äquivarianten holomorphen Abbildungen $X \to Y$. $\mathrm{Aut}_G(X) := \mathrm{Hol}_G(X, X) \cap \mathrm{Aut}(X)$ kann als die Automorphismengruppe der komplexen G-Struktur auf X angesehen werden; offenbar ist $\mathrm{Aut}_G(X)$ gerade der Zentralisator von G in $\mathrm{Aut}(X)$. Im Falle, daß Y ein trivialer G-Raum ist, stellt $\mathrm{Hol}_G(X, Y)$ gerade die Menge aller G-invarianten holomorphen Abbildungen $X \to Y$ dar. Es gilt nun:

Hilfssatz 3.1. — *Sind* X, Y *holomorphe G-Räume und ist* X/G (*in der Quotiententopologie*) *quasi-kompakt, so ist* $\mathrm{Hol}_G(X, Y)$ *lokal-kompakt.*

Beweis. — Nach Voraussetzung existiert ein Kompaktum $K \subset X$ mit $G(K) = X$. Ist $\varphi \in \mathrm{Hol}_G(X, Y)$ eine beliebige G-äquivariante Abbildung, so wählen wir ein $n > 0$, eine offene Überdeckung $\{U_i\}_{1 \leqslant i \leqslant n}$ von K in X und eine offene Überdeckung $\{V_i\}_{1 \leqslant i \leqslant n}$ von $\varphi(K)$ in Y so, daß für jedes i gilt: (1)$\varphi(U_i) \subset \subset V_i \subset \subset Y$; (2) Eine Umgebung von $\overline{V}_i \subset Y$ ist biholomorph äquivalent zu einer analytischen Teilmenge von $\mathbf{E}^n$. Dann ist $W := \{f \in \mathrm{Hol}_G(X, Y) : f(U_i) \subset V_i\}$ eine Umgebung von φ. Wir wollen zeigen, daß W relativ-kompakt in $\mathrm{Hol}_G(X, Y)$ liegt. Dazu betrachten wir eine Folge (f_n) in W. Ist $U = U_1 \cup \cdots \cup U_n$, so dürfen wir annehmen, daß $f_n | U$ gegen ein $h \in \mathrm{Hol}(U, Y)$ konvergiert. Für jedes $g \in G$ konvergiert wegen $f_n = g f_n g^{-1}$ die Folge $f_n | g(U)$ gegen die Abbildung $g h g^{-1} | g(U) \in \mathrm{Hol}(g(U), Y)$, d.h. (f_n) konvergiert in $\mathrm{Hol}(X, Y)$, d.h. $\overline{W}$ ist kompakt.

Daraus folgt nun für jeden holomorphen G-Raum X:

Satz 3.2. — *Ist* X/G *quasi-kompakt, so existiert auf* $\mathrm{Aut}_G(X)$ *genau eine komplexe Liegruppenstrukur, für die die kanonische Abbildung* $\mathrm{Aut}(X) \times X \to X$ *holomorph ist.*

Beweis. — $\mathrm{Aut}_G(X)$ ist als topologische Untergruppe der lokalkompakten topologischen Halbgruppe $\mathrm{Hol}_G(X, X)$ ebenfalls lokalkompakt. Es gibt eine endliche Vereinigung V von irreduziblen Komponenten von X und eine Umgebung W der Identität $1 \in \mathrm{Aut}_G(X)$ mit $G(V) = X$ und $W(V) = V$. Also ist $\mathrm{Aut}_G(X)$ eine reelle Liegruppe (vergl. [15] Satz 4). Sei $\Delta(X)$ die komplexe Liealgebra aller holomorphen Vektorfelder auf X und $\Theta \subset \Delta(X)$ die zu $\mathrm{Aut}_G(X)$ gehörige reelle

Unteralgebra. Es genügt zu zeigen, daß Θ eine komplexe Unteralgebra ist ([15]). Sei also $D \in i\Theta$. Wählen wir nun eine relativ-kompakte offene Teilmenge U von X mit $G(U) = X$, so gibt es ein $\varepsilon > 0$ derart, daß das Vektorfeld $D|U$ für $|t| < \varepsilon$ integrierbar ist zu einer lokalen einparametrigen Gruppe $g_t : U \to X$ lokaler Transformationen (vergl. [15]). Dann kann D jedoch für alle t mit $|t| < \varepsilon$ integriert werden zu der lokalen Transformationsgruppe $h_t : X \to X$ definiert durch $h_t(gx) = g(g_t x)$ für alle $g \in G$ und $x \in U$, d.h. $D \in \Theta$. Q.e.d.

Ist X ein trivialer G-Raum, so ist $\mathrm{Aut}_G(X) = \mathrm{Aut}(X)$ und $X/G = X$. 3.2 enthält also als Spezialfall die bekannte Tatsache, daß für jeden kompakten komplexen Raum die Automorphismengruppe eine komplexe Liegruppe ist (vergl. dazu [4; 8; 15; 18]).

Folgerung 3.3. — *Ist* Y *schwach-hyperbolisch, so besitzt jede transitive Untergruppe* $H \subset \mathrm{Aut}(Y)$ *diskretes Zentrum.*

Beweis. — Es gilt Zentrum $(H) \subset \mathrm{Aut}_H(Y)$. Wegen Y/H kompakt ist $\mathrm{Aut}_H(Y)$ eine komplexe Liegruppe und damit nach 1.5 diskret.

Ist Y ein hyperbolischer Raum, so ist nach Definition die kanonische Abbildung $\Phi : X \times \mathrm{Hol}(X, Y) \to X \times Y$ kompakt. Ist Y zusätzlich ein G-Raum, so ist Φ eine G-äquivariante Abbildung, und man erhält in natürlicher Weise eine quasi-kompakte Abbildung (d.h. Urbilder quasi-kompakter Mengen sind quasi-kompakt)

$$\Phi/G : (X \times \mathrm{Hol}(X, Y))/G \to (X \times Y)/G.$$

Da $\mathrm{Hol}_G(X, Y)$ als Fixpunktmenge von G abgeschlossen in $\mathrm{Hol}(X, Y)$ ist, folgt daraus somit für jeden hyperbolischen G-Raum Y.

Bemerkung 3.4. — $\Phi/G : X/G \times \mathrm{Hol}_G(X, Y) \to (X \times Y)/G$ *ist eine quasi-kompakte Abbildung.*

Folgerung 3.5. — *Ist* $(X \times Y)/G$ *quasi-kompakt, so ist* $\mathrm{Hol}_G(X, Y)$ *kompakt.*

Folgerung 3.6. — *Ist* X *kompakt und* Y/G *quasi-kompakt, so ist* $\mathrm{Hol}_G(X, Y)$ *ein kompakter komplexer Raum (die leere Menge sei als komplexer Raum zugelassen).*

Folgerung 3.7. — *Ist* Y *ein trivialer* G-Raum, *so ist die Abbildung* $\Phi/G : X/G \times \mathrm{Hol}_G(X, Y) \to X/G \times Y$ *quasi-kompakt.*

4. Beispiele hyperbolischer Räume.

SATZ 4.1. — *Existiert auf dem Einheitskreis* **E** *eine stetige Metrik* D *und auf dem komplexen Raum* Y *eine vollständige stetige Metrik* d *mit*

$$(*) \qquad d(fx, fy) \leqslant D(x, y)$$

für alle $x, y \in \mathbf{E}$ *und* $f \in \mathrm{Hol}(\mathbf{E}, Y)$, *so ist* Y *hyperbolisch. Für jeden kompakten komplexen Raum* X *ist überdies auch* Hol(X, Y) *hyperbolisch.*

Beweis. — Durch $D^n(z, w) := \sum_{k=1}^{n} D(z_k, w_k)$ für

$$z = (z_1, \ldots, z_n) \quad \text{und} \quad w = (w_1, \ldots, w_n)$$

wird auf $\mathbf{E}^n$ eine stetige Metrik D^n mit $d(fz, fw) \leqslant D^n(z, w)$ für alle $z, w \in \mathbf{E}^n$ und $f \in \mathrm{Hol}(\mathbf{E}^n, Y)$ definiert. Wegen 2.5 und 2.7 ist Y also hyperbolisch. Sei nun X ein kompakter komplexer Raum und σ die durch

$$\sigma(f, h) := \sup_{x \in X} d(fx, hx)$$

definierte Metrik auf Hol(X, Y). σ ist stetig, vollständig und erfüllt die Kontraktionseigenschaft (*) bezüglich holomorpher Abbildungen $\mathbf{E} \to \mathrm{Hol}(X, Y)$.

Aus 4.1 folgt, daß die in [22] definierten hyperbolischen Räume auch hyperbolisch in unserem Sinne sind. Als Anwendung von 4.1 folgt für jeden komplexen Raum Y:

SATZ 4.2. — *Ist* Y *beschränkt* K-*vollständig und* Y/Aut(Y) *quasi-kompakt, so ist* Y *hyperbolisch* (1).

Beweis. — Sei $G := \mathrm{Aut}(Y)$ und $K \subset Y$ ein Kompaktum mit $G(K) = Y$. ρ_Y (vergl. 1.2 Beweis) ist eine mit der Topo-

(1) Mit 1.3 kann allgemeiner bewiesen werden: *Jeder schwach hyperbolische Raum Y mit Y/Aut* (Y) *quasi-kompakt ist hyperbolisch.*

logie verträgliche Metrik auf Y. Es gibt somit ein $\varepsilon > 0$ so, daß für jedes $y \in K$ die ε-Kugel $\{z \in Y : \rho_Y(z, y) < \varepsilon\}$ relativ-kompakt in Y ist. Da G die Metrik ρ_Y invariant lässt, ist somit jede ε-Kugel in Y relativ-kompakt, d.h. ρ_Y ist vollständig. Wegen $\rho_Y(fz, fw) \leqslant \rho_E(z, w)$ für alle $z, w \in \mathbf{E}$ und $f \in \mathrm{Hol}(\mathbf{E}, Y)$ ist Y nach 4.1 hyperbolisch.

Zusammen mit 2.10 ergibt sich daraus:

Folgerung 4.3. — *Ein komplexer Raum* Y *ist bereits dann hyperbolisch, wenn für die universelle Überlagerung* $\tilde{Y}$ *wenigstens eine der folgenden Bedingungen erfüllt ist*:

(a) $\tilde{Y}$ *ist beschränkt* K-*vollständig und homogen*.

(b) $\tilde{Y}$ *ist beschränkt* K-*vollständig und Überlagerung eines kompakten Raumes.*

Folgerung 4.4. — *Eine Riemannsche Fläche* Y *ist genau dann hyperbolisch im Sinne von* 2.6, *wenn* $\tilde{Y} \approx \mathbf{E}$ *gilt* (d.h. *also, wenn* Y *hyperbolisch im klassischen Sinne ist*).

Weitere Beispiele erhält man durch den folgenden Begriff ([13]): Eine Funktion p auf einem komplexen Raum X heißt *plurisubharmonisch*, wenn gilt

(α) *Für jedes* $x \in X$ *ist* $p(x)$ *eine reelle Zahl oder* $-\infty$.

(β) p *ist halbstetig nach oben* (d.h. $\overline{\lim\limits_{y \to x}}\, p(y) \leqslant p(x)$).

(γ) *Für jede holomorphe Abbildung* $f : \mathbf{E} \to X$ *ist* pf *subharmonisch auf* $\mathbf{E}$.

Es gilt nun:

Satz 4.5. — *Es sei* X *ein schwach hyperbolischer Raum,* K *eine reelle Konstante und* $p < K$ *eine plurisubharmonische Funktion auf* X. *Gilt dann* $\lim p(x_n) = K$ *für jede diskrete Punktfolge* (x_n) *in* X, *so ist* X *hyperbolisch.*

Beweis. — Es sei $\mathfrak{F}$ ein Ultrafilter auf $\mathrm{Hol}(\mathbf{E}, X)$. Nach Voraussetzung konvergiert $\mathfrak{F}$ gegen ein $f \in \mathfrak{C}(\mathbf{E}, X')$. Angenommen, es gebe Punkte $z, w \in \mathbf{E}$ mit $f(z) \in X$ und $f(w) \notin X$. Dann existiert ein $\varepsilon > 0$, ein $F \in \mathfrak{F}$ und eine Umgebung U von z mit $p(F(U)) < K - \varepsilon$. Sei $h \leqslant K$ die obere Einhüllende der Familie $\{pf : f \in F\}$; h ist subharmonisch auf $\mathbf{E}$ (vergl. [13]). Offensichtlich ist $h(z) \leqslant K - \varepsilon < K$ und $h(w) = K$, was dem Maximumprinzip für subharmonische Funktionen widerspricht. Also gilt $f \in \mathrm{Hol}(\mathbf{E}, X')$; wegen 2.8 ist X daher hyperbolisch.

Nehmen wir an, X sei ein K-vollständiger Raum und Y sei ein *analytisches Polyeder* in X (d.h. Y ist relativ-kompakt in X und jede Zusammenhangskomponente von Y schreibt sich in der Form $\{z \in X : |f(z)| < 1$ für alle f aus $F\}$, wobei $F \subset \mathrm{Hol}(X, \mathbf{C})$ eine endliche Teilmenge ist). Mit Hilfe des Maximumprinzips folgt leicht, daß Y hyperbolisch ist. Jeder zusammenhängende Steinsche Raum X läßt sich als Vereinigung einer aufsteigenden Folge (X_n) analytischer Polyeder $X_n \subset X$ — und damit hyperbolischer Teilgebiete — schreiben. Hyperbolische Räume zeigen in mancher Hinsicht ähnliches Verhalten wie Steinsche Räume. So gilt z.B. für jeden komplexen Raum X: *Ein Gebiet* Y *in* X *ist bereits dann hyperbolisch, wenn es Durchschnitt von hyperbolischen Teilgebieten ist.* Es existiert also zu jedem Teilgebiet $Y \subset X$ höchstens ein kleinstes hyperbolisches Teilgebiet $\mathfrak{H}(Y)$ in X mit $Y \subset \mathfrak{H}(Y)$. Ferner gilt:

Bemerkung 4.6. — *Es sei* Y *ein hyperbolischer Raum und* $H \subset Y$ *eine Hyperfläche* (d.h. *jeder Punkt* $y \in Y$ *besitzt eine Umgebung* U *mit* $U \cap H = \{z \in U : f(z) = 0\}$ *für eine geeignete holomorphe Funktion* f *auf* U). *Dann ist auch das Komplement* $Y - H$ *hyperbolisch.*

Beweis. — Sei (φ_n) eine Folge in $\mathrm{Hol}(\mathbf{E}, Y - H)$. Wir dürfen annehmen, daß φ_n gegen eine holomorphe Abbildung $\varphi : \mathbf{E} \to Y$ konvergiert. Angenommen, $y := \varphi(x) \in H$ für ein $x \in \mathbf{E}$. Ist dann U eine Umgebung von y, in der H durch die eine Funktion f beschrieben wird so gibt es eine zusammenhängende Umgebung W von x mit $\varphi(W) \subset U$ und $\varphi_n(W) \subset U$ für $n \geqslant n_0$. Wegen $f\varphi_n(w) \neq 0$ für alle $w \in W$, $n \geqslant n_0$ und $f\varphi(x) = 0$ ist $f\varphi \equiv 0$, d.h. $\varphi(\mathbf{E}) \subset H$.

Analog 4.6 läßt sich für jeden schwach hyperbolischen Raum Y zeigen: Y *ist hyperbolisch, wenn zu jeder diskreten Punktfolge* (y_n) *in* Y *ein Kompaktum* $K \subset Y$ *und eine holomorphe Abbildung* f *von* $Y - K$ *in einen hyperbolischen*

Raum H *so existiert, daß* $(f(y_n))$ *eine diskrete Teilfolge in* H *besitzt.*

Jedes unverzweigte hyperbolische Gebiet über einer Steinschen Mannigfaltigkeit erfüllt den Kontinuitätssatz (vergl. [2; 7]) und ist damit Steinsch. Eine Umkehrung dieser Aussage wollen wir nun für einen speziellen Gebietstyp beweisen: Für jedes Gebiet D im reellen Vektorraum $\mathbf{R}^n$ sei

$$\mathrm{T(D)} := \{z \in \mathbf{C}^n : \mathfrak{Re}(z) \in \mathrm{D}\},$$

wobei der Realteil $\mathfrak{Re}(z)$ von $z = (z_1, \ldots, z_n)$ durch $(\mathfrak{Re}(z_1), \ldots, \mathfrak{Re}(z_n))$ definiert sei (analog sei definiert $e^z \in \mathbf{C}^n$ und $ln|z| \in \mathbf{R}^n$). Durch die Zuordnung $z \to e^z$ ist T(D) eine Überlagerung des Reinhardtschen Körpers

$$\mathrm{K(D)} := \{z \in \mathbf{C}^n : ln|z| \in \mathrm{D}\}.$$

Ist $\mathrm{D}' \subset \mathbf{R}^m$ ein weiteres Gebiet, so läßt sich jede reell-affine Abbildung $\tau : \mathrm{D} \to \mathrm{D}'$ zu einer komplex-affinen — und damit holomorphen — Abbildung $\mathrm{T(D)} \to \mathrm{T(D')}$ fortsetzen ($\mathbf{R}^n$ werde in natürlicher Weise als Teilmenge von $\mathbf{C}^n$ aufgefaßt). Es gilt dann:

Bemerkung 4.8. — T(D) *ist genau dann hyperbolisch, wenn* $\mathrm{D} \subset \mathbf{R}^n$ *konvex ist und keine reelle Gerade enthält.*

Beweis. — Sei D konvex und enthalte keine ganze Gerade des $\mathbf{R}^n$. Nach einer affinen Transformation darf angenommen werden, daß $\mathrm{D} \subset (\mathbf{R}^-)^n$ gilt, wobei $\mathbf{R}^-$ die Menge aller negativen reellen Zahlen ist. Dann gilt $\mathrm{K(D)} \subset \mathbf{E}^n \subset \mathbf{C}^n$, d.h. $\mathrm{Y} := \mathrm{T(D)}$ ist schwach hyperbolisch. $\mathbf{H} := \mathrm{T}(\mathbf{R}^-) \subset \mathbf{C}$ ist bekanntlich eine hyperbolische Riemannsche Fläche. Betrachten wir jetzt eine diskrete Folge (y_n) in Y. Ist die Folge $\mathfrak{Re}(y_n)$ diskret in $\mathbf{R}^n$ (bzw. nicht diskret in $\mathbf{R}^n$), so gibt es wegen D konvex eine komplex-affine Funktion f auf $\mathbf{C}^n$ mit $f(\mathrm{Y}) \subset \mathbf{H}$ und

$$\limsup |f(y_n)| = +\infty \quad (\text{bzw. } \limsup \mathfrak{Re}(f(y_n)) = 0).$$

Also ist T(D) hyperbolisch. Sei nun umgekehrt T(D) hyperbolisch. Enthält D eine reelle Gerade, so enthält T(D) eine komplexe Gerade und kann somit wegen 1.4 nicht hyperbolisch sein. Sei ferner $\mathrm{I} := \{t \in \mathbf{R} : 0 < t < 1\}$ und $\gamma : \mathbf{R} \to \mathrm{D}$

eine stetige Abbildung. Mit α_s werde die durch

$$t \to \gamma(0) + t(\gamma(s) - \gamma(0))$$

für jedes feste s definierte affine Abbildung $I \to \mathbf{R}^n$ bezeichnet. Ist D nicht konvex, so kann γ so gewählt werden, daß gilt

$$\text{(i)} \qquad \alpha_s(I) \subset D \text{ für } s < 1 \qquad \text{und} \qquad \alpha_1(I) \not\subset D.$$

Da jedes α_s zu einer holomorphen Abbildung $T(I) \to T(D)$ fortgesetzt werden kann, ist (i) wegen $\alpha_1(0) \in D$ nur dann möglich, wenn $T(D)$ nicht hyperbolisch ist.

Da nun $T(D)$ genau dann Steinsch ist, wenn D konvex ist (vergl. [3]), liefert 4.8 die :

FOLGERUNG 4.9. — *Das Gebiet* $T(D) \subset \mathbf{C}^n$ *ist genau dann hyperbolisch, wenn es schwach hyperbolisch und holomorph-konvex ist.* (Es bleibt offen, inwieweit die Klasse der hyperbolischen Räume übereinstimmt mit der Klasse derjenigen komplexen Räume, die schwach hyperbolisch und holomorph-konvex sind).

Weitere Beispiele für hyperbolische Räume erhält man durch :

BEMERKUNG 4.10. — *Jedes relativ-kompakte streng-pseudokonvexe Gebiet* Y *in einer* K-*vollständigen komplexen Mannigfaltigkeit* X *ist hyperbolisch.*

Beweis. — Die abgeschlossene Hülle von Y in X besitzt eine schwach hyperbolische Umgebung in X. Also liegt $\mathrm{Hol}(\mathbf{E}, Y)$ relativ-kompakt in $\mathrm{Hol}(\mathbf{E}, X)$. Die Behauptung folgt nun einfach aus der folgenden wohlbekannten Tatsache : Für jede nicht-konstante holomorphe Abbildung $f : \mathbf{E} \to X$ mit $f(\mathbf{E}) \subset \overline{Y} \subset X$ gilt $f(\mathbf{E}) \subset Y$.

5. Endlichkeitssätze für holomorphe Abbilddungen in hyperbolische Räume.

Die Automorphismengruppe $\mathrm{Aut}(Y)$ eines komplexen Raumes Y ist stets eine topologische Gruppe. Ist Y kompakt, so ist Aut(Y) offen in Hol(Y, Y). Ist Y schwach hyperbolisch, so ist Aut(Y) abgeschlossen in Hol(Y, Y) (folgt aus 1.3). Ist Y zugleich kompakt und schwach hyperbolisch — Y ist dann natürlich sogar hyperbolisch — so besteht Aut(Y) folglich aus der Vereinigung gewisser Zusammenhangskomponenten der analytischen Halbgruppe Hol(Y,Y) Es gilt sogar (vergl. [19; 20]) :

Satz 5.1. — *Für jeden kompakten hyperbolischen Raum* Y *ist die Automorphismengruppe* Aut(Y) *endlich.*

Beweis. — Aut(Y) ist wegen 1.3 und 3.2 eine kompakte komplexe Liegruppe, die holomorph auf Y operiert. Wegen 1.5 ist Aut(Y) endlich.

Satz 5.2. — *Ist* Y *kompakt und hyperbolisch, so ist jede holomorphe Abbildung* φ *von* Y *auf* Y *ein Automorphismus von* Y.

Beweis. — Wegen Hol(Y, Y) kompakt existiert eine Folge (n_k) natürlicher Zahlen mit $m_k := n_{k+1} - n_k > 0$ für alle k und $f := \lim \varphi^{n_k} \in \mathrm{Hol}(Y, Y)$. Wegen Y kompakt ist auch f surjektiv, und die Folge (φ^{m_k}) konvergiert gegen $1 \in \mathrm{Aut}(Y)$. Wegen Aut(Y) offen gilt somit $\varphi^m \in \mathrm{Aut}(Y)$ für ein m, d.h. $\varphi \in \mathrm{Aut}(Y)$.

Eine holomorphe Abbildung $g : Y \to Y$ heißt eine *Retraktion*, wenn $g^2 = g$ gilt. Als Menge aller Fixpunkte von g ist das Bild $g(Y)$ stets eine analytische Teilmenge von Y. Ist Y singularitätenfrei, so auch $g(Y)$ (vergl. [14; 25]). Aus 5.1 und 5.2 ergibt sich unmittelbar :

Folgerung 5.3. — *Ist* Y *kompakt und hyperbolisch, so gibt es zu jeder holomorphen Abbildung* $f : Y \to Y$ *eine natürliche Zahl* $n > 0$ *derart,* daß $g = f^n$ *eine Retraktion ist.*

Weiter gilt :

Satz 5.4. — *Es sei* X *ein zusammenhängender kompakter komplexer Raum und* Y *ein hyperbolischer Raum, dessen universelle Überlagerung* $\tilde{Y}$ *keine kompakte analytische Teilmenge positiver Dimension enthält* (z.B. wenn $\tilde{Y}$ K-vollständig ist). *Dann gibt es nur endlich viele holomorphe Abbildungen*

$f: X \to Y$, *die einen vorgegebenen Punkt* $x \in X$ *in einen vorgegebenen Punkt* $y \in Y$ *abbilden.*

Beweis. — Die kanonische Projektion

$$\pi : X \times \mathrm{Hol}(X, Y) \to \mathrm{Hol}(X, Y)$$

ist holomorph;

$$Z := \pi(\Phi^{-1}(x, y)) = \{f \in \mathrm{Hol}(X, Y) : f(x) = y\}$$

(vergl. § 2 (a)) ist also ein kompakter komplexer Raum. Sind $\tau : \tilde{X} \to X$ und $\varphi : \tilde{Y} \to Y$ die universellen Überlagerungsabbildungen und sind $\tilde{x} \in \tau^{-1}(x)$, $\tilde{y} \in \varphi^{-1}(y)$ festgewählte Punkte, so gibt es zu jedem $f \in Z$ genau ein $\tilde{f} \in \mathrm{Hol}(\tilde{X}, \tilde{Y})$ mit $f(\tilde{x}) = \tilde{y}$ und $\varphi\tilde{f} = f\tau$. Ist Z_0 eine Zusammenhangskomponente von Z, so ist für jedes $w \in \tilde{X}$ die durch $f \to \tilde{f}(w)$ definierte Abbildung $Z_0 \to \tilde{Y}$ holomorph und damit konstant. Also besteht Z_0 aus nur einem Element, d.h. Z ist endlich.

Ein komplexer Raum R heißt *beschränkt separabel*, wenn die Algebra der beschränkten holomorphen Funktionen auf R die Punkte von R trennt (dann ist $\tilde{R}$ insbesondere beschränkt K-vollständig). In [5] ist (in etwas allgemeinerer Form) gezeigt worden:

SATZ 5.5 (Borel-Narasimhan). — *Es sei* X *ein zusammenhängender kompakter komplexer Raum und* Y *ein komplexer Raum, der eine beschränkt separable (unverzweigte) Überlagerung besitzt. Dann stimmen zwei holomorphe Abbildungen* $f: X \to Y$ *und* $g: X \to Y$ *bereits dann überein, wenn sie in einem Punkt* $x \in X$ *gleichen Bildpunkt* $y = f(x) = g(x)$ *besitzen und den gleichen Fundamentalgruppenhomomorphismus* $\pi_1(X, x) \to \pi_1(Y, y)$ *induzieren.*

In gleicher Weise läßt sich für jeden zusammenhängenden kompakten komplexen Raum X und jedes Y zeigen:

SATZ 5.5*a*. — *Ist die universelle Überlagerung von* Y *beschränkt* K-*vollständig, so ist die durch* $\Phi(x, f) = (x, f(x))$ *definierte kanonische Abbildung* $\Phi : X \times \mathrm{Hol}(X, Y) \to X \times Y$ *diskret. Speziell gilt dann dim* $\mathrm{Hol}(X, Y) = \dim Y$.

Folgerung 5.6. — *Unter den Voraussetzungen von* 5.5*a* *ist auch die durch* $\Psi(f, x) = (f, f(x))$ *definierte Abbildung* $\Psi : \mathrm{Hol}(X, Y) \times X \to \mathrm{Hol}(X, Y) \times Y$ *diskret.*

Beweis. — Durch $x \to i_x^*$ wird X holomorph und injektiv in Hol(Hol(X, Y), Y) abgebildet. (Mit dem gleichen Argument folgt, daß Ψ eine kompakte Abbildung ist, wenn Y hyperbolisch ist).

Es sei $f : X \to Y$ eine holomorphe Abbildung. Diejenige Äquivalenzrelation auf X, deren Äquivalenzklassen gerade die f-Fasern (bzw. die Zusammenhangskomponenten der f-Fasern) sind, wird die von f auf X *induzierte* (bzw. die von f auf X *induzierte einfache*) *Zerlegung genannt. Es gilt nun :*

Satz 5.7. — *Es seien* X *und* Y *kompakte komplexe Räume. Besitzt* Y *eine beschränkt separable Überlagerung, so gilt für jede der endlich vielen Zusammenhangskomponenten* Z *von* Hol(X, Y) :

(1) *Alle* $f \in Z$ *induzieren auf* X *die gleiche einfache Zerlegung;*

(2) *Jeder Punkt* $x \in X$ *besitzt eine Umgebung* U *derart, daß alle Abbildungen* $f : U \to Y$ *mit* $f \in Z$ *die gleiche Zerlegung von* U *induzieren.*

Beweis ad (1). — Sei $f \in Z$, $y \in Y$ und A eine Zusammenhangskomponente der Faser $f^{-1}(y)$. Für alle $a, b \in A$ gilt dann

$$\begin{aligned} f(a) = f(b) &\Longrightarrow i_a^*(f) = i_b^*(f) \\ &\Longrightarrow i_a^* = i_b^* \quad \text{wegen } 5.5a \text{ auf } Z \\ &\Longrightarrow g(a) = g(b) \quad \text{für alle} \quad g \in Z. \end{aligned}$$

Beweis ad (2). — X und Y dürfen als zusammenhängend vorausgesetzt werden. σ_X ist eine stetige Pseudometrik auf X und σ_Y eine stetige Metrik auf Y mit

$$\sigma_Y(fz, fw) \leqslant \sigma_X(z, w)$$

für alle $z, w \in X$ und $f \in \mathrm{Hol}(X, Y)$ (vergl. 1.2 Beweis). Es gibt folglich ein $\varepsilon > 0$ mit der Eigenschaft, daß zu jeder Teilmenge $B \subset Y$ mit einem σ_Y-Durchmesser $< \varepsilon$ ein einfachzusammenhängendes Gebiet $G \subset Y$ existiert mit $B \subset G$.

Wählen wir nun eine zusammenhängende offene Umgebung U von x mit einem σ_X-Durchmesser $< \varepsilon$, so gilt für alle a, $b \in U$ und alle $f \in Z$ mit $f(a) = f(b)$: Es gibt eine Kurve $\gamma(t)$ in U mit $\gamma(0) = a$ und $\gamma(1) = b$. Nach Konstruktion von ε ist die geschlossene Kurve $f(\gamma(t))$, $0 \leqslant t \leqslant 1$, nullhomotop in Y, und i_a^*, i_b^* erzeugen somit den gleichen Fundamentalgruppenhomorphismus $\pi_1(Z, f) \rightarrow \pi_1(Y, f(a))$. Also gilt wegen 5.5 auf Z $i_a^* = i_b^*$.

Folgerung 5.8. — *Sind* X, Y *kompakt und ist* $\tilde{Y}$ *beschränkt* K-*vollständig, so existieren höchstens endlich viele holomorphe Abbildungen von* X *auf* Y *mit zusammenhängenden Fasern.*

Beweis. — Hol(X, Y) ist kompakt. Sei $Z \subset$ Hol(X, Y) eine Zusammenhangskomponente, die eine zusammenhängende surjektive Abbildung f enthält. Wegen 5.7 (1) — für diesen Punkt wurde zum Beweis nur 5.5a ausgenutzt — gibt es dann zu jedem $g \in Z$ eine surjektive Abbildung $\alpha_g : Y \rightarrow Y$ mit $g = \alpha_g f$. Jedes α_g ist eine schwach-holomorphe Abbildung (d.h. stetig und in allen Mannigfaltigkeitspunkten holomorph). Y versehen mit der Garbe aller schwach-holomorphen Funktionskeime ist ebenfalls ein hyperbolischer Raum, und α_g ist wegen 5.2 ein Automorphismus bezüglich dieser komplexen Struktur. Wegen 5.1 ist Z somit endlich. Q.e.d.

Eine analytische Teilmenge A eines komplexen Raumes Y wollen wir einen *direkten Faktor* von Y nennen, wenn ein komplexer Raum B positiver Dimension, ein $b \in B$ und eine biholomorphe Abbildung μ von Y auf $A \times B$ mit $\mu(a) = (a, b)$ für alle $a \in A$ existiert. Ist $f : X \rightarrow Y$ eine holomorphe Abbildung, deren Bild ganz in einem direkten Faktor von Y liegt, so kann also f kein isolierter Punkt von Hol(X, Y) sein. Es gilt nun:

Satz 5.9. — *Es sei* X *ein zusammenhängender kompakter komplexer Raum und* Y *das direkte Produkt von endlich vielen hyperbolischen Riemannschen Flächen. Dann gilt:*

(1) *Zu jedem* $y \in Y$ *gibt es nur endlich viele holomorphe Abbildungen* $f : X \rightarrow Y$ *mit* $y \in f(X)$. *Insbesondere gibt es nur endlich viele holomorphe Abbildungen von* X *auf* Y.

(2) *Es gibt nur endlich viele holomorphe Abbildungen* $f: X \rightarrow Y$, *für die* $f(X)$ *nicht in einem direkten Faktor von* Y *liegt.*

Beweis. — *ad* (1) Wir dürfen annehmen, daß Y eine hyperbolische Riemannsche Fläche ist. Sei Z eine Zusammenhangskomponente des kompakten komplexen Raumes

$$\{f \in \mathrm{Hol}(X, Y) : y \in f(X)\},$$

die eine nicht-konstante Abbildung enthält. Dann ist jedes Element von Z surjektiv, und Y ist kompakt. Da wegen 5.7 alle f aus Z die gleiche einfache Zerlegung R von X induzieren und $X' = X/R$ ein komplexer Raum ist, über den sich alle Elemente von Z somit Steinfaktorisieren lassen (vergl. [6]), dürfen wir $X = X'$ annehmen, d.h. $\dim X = 1$. Wir dürfen wegen 5.4 weiter annehmen, daß X irreduzibel ist. Schließlich dürfen wir sogar annehmen, daß X eine Riemannsche Fläche ist (man gehe zur Normalisierung über). Für jedes $f \in Z$ und $x \in X$ sind

$$A_f(x) := \{z \in X : f(x) = f(z)\} \quad \text{und} \quad A(x) := \bigcup_{f \in Z} A_f(x)$$

analytische Teilmengen von X. Wegen 5.7 (2) ist x ein isolierter Punkt von $A(x)$, d.h. $A(x)$ ist endlich. Da jedes f aus Z eine (i.a. verzweigte) Überlagerungsabbildung mit einer festen Bläterzahl b ist, hängt $A_f(x)$ in Wahrheit nicht von f ab, d.h. alle Elemente von Z erzeugen die gleiche Zerlegung von X. Für alle f, g aus Z existiert somit ein $\alpha(f, g)$ in Aut(Y) mit $f = \alpha(f, g)g$. Wegen 5.1 ist Z somit endlich.

ad (2) Sei $Y = Y_1 \times \cdots \times Y_n$ und $\pi_k : Y \rightarrow Y_k$ für jedes k die kanonische Projektion. Ist $f: X \rightarrow Y$ eine holomorphe Abbildung, für die $f(X)$ in keinem direkten Faktor von Y liegt, so ist jede Abbildung $\pi_k f: X \rightarrow Y_k$ surjektiv. Aus (1) folgt sodann die Behauptung.

Ist Y ein direktes Produkt kompakter hyperbolischer Riemannscher Flächen, so läßt sich Y bekanntlich singularitätenfrei in einen komplex-projektiven Raum P_N einbetten

Im Fall dim $Y > 1$ ist also für jedes y aus Y die Menge

$$\mathfrak{H}_y = \{A \subset Y : \text{Analytische Teilmenge durch } y\}$$

überabzählbar, und aus 5.9 folgt, daß niemals unendlich viele Elemente von $\mathfrak{H}_y$ die gleiche komplexe Struktur besitzen.

SATZ 5.10. — *Es sei* Y *eine zusammenhängende normale analytische Teilmenge eines direkten Produkts kompakter hyperbolischer Riemannscher Flächen und* λ *eine holomorphe Abbildung von* Y *auf einen normalen komplexen Raum* B. *Es sei ferner* $\Delta \subset B$ *eine Zariskidichte Teilmenge* (d.h. *es gebe keine analytische Menge* A *in* B *mit* $\Delta \subset A \neq B$) *und* K *ein zusammenhängender kompakter komplexer Raum. Existiert dann für jedes* d *aus* Δ *eine holomorphe Abbildung* τ_d *von* K *auf* die Faser $\lambda^{-1}(d)$, *so gibt es ein kommutatives Diagramm*

$$\begin{array}{ccc} Z \times X & \xrightarrow{\Phi} & Y \\ {\scriptstyle\pi}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle\lambda}, \\ Z & \xrightarrow[\mu]{} & B \end{array}$$

wobei Z, X *zusammenhängende normale kompakte komplexe Räume,* $\pi : Z \times X \to Z$ *die kanonische Projektion und* Φ *eine holomorphe* (i.a. *verzweigte*) *Überlagerungsbbildung ist. Besitzen alle* λ*-Fasern die gleiche Dimension, so ist auch* μ *eine* (i.a. *verzweigte*) *Überlagerungsabbildung.*

Beweis. — Es sei $\mathfrak{J}$ die Menge aller irreduziblen Komponenten von $\mathrm{Hol}(K, Y)$ und $Q(A) := \{d \in \Delta : \tau_d \in A\}$ für jedes A aus $\mathfrak{J}$. Wegen $\Delta = \bigcup_{A \in \mathfrak{J}} Q(A)$ und $\mathfrak{J}$ endlich ist $Q(Z)$ Zariskidicht für wenigstens ein Z aus $\mathfrak{J}$. Wegen 5.7 (1) dürfen wir annehmen, daß alle Elemente von Z diskrete Abbildungen sind. Wir setzen nun $X := K$ und $\Phi(f, x) = f(x)$ für alle f aus Z und x aus X. Da Z kompakt ist, ist $\lambda\Phi(Z \times X)$ eine analytische Menge in B, die die Menge $Q(Z)$ umfaßt, d.h. Φ ist surjektiv. Wegen 5.9 (1) ist Φ diskret. Ist λ nicht entartet, so gilt $f(X) = g(X)$ für alle f, g aus Z mit $\mu(f) = \mu(g)$. Wegen 5.9 ist dann auch μ eine diskrete Abbildung.

Es ist nun interessant, unter welchen Bedingungen

$\lambda : Y \to B$ ein holomorphes Faserbündel ist. Dazu zeigen wir (vergl. [9]):

FOLGERUNG 5.11. — *Es sei* Y *ein irreduzibler hyperbolischer Raum,* B *ein normaler komplexer Raum und* $\lambda : Y \to B$ *eine kompakte holomorphe Abbildung. Sind dann alle* λ*-Fasern biholomorph äquivalent, so ist* $\lambda : Y \to B$ *ein holomorphes Faserbündel.*

Beweis. — Sei $X := \lambda^{-1}(b)$ für ein b aus B.

$$Q := \{f \in \mathrm{Hol}(X, Y) : \lambda f(x) = \lambda f(y) \text{ für alle } x, y \text{ aus } X\}$$

ist eine analytische Menge in $\mathrm{Hol}(X, Y)$. Es sei $\mathfrak{J}$ die Menge aller irreduziblen Komponenten von Q, die wenigstens eine biholomorphe Abbildung von X auf eine λ-Faser enthalten. Die durch $(f, x) \to f(x)$ definierte Abbildung $\Phi : Q \times X \to Y$ ist kompakt; für jedes A aus $\mathfrak{J}$ it somit $\lambda\Phi(A \times X)$ analytisch in B. Wir dürfen annehmen. daß B abzählbare Topologie besitzt. Dann ist $\mathfrak{J}$ abzählbar, und wegen $B = \bigcup \lambda A(X)$ gibt es ein Z aus $\mathfrak{J}$ mit $Z(X) = Y$. Sei nun $M \neq \emptyset$ die Menge aller f aus Z, die X biholomorph auf die Faser $\lambda^{-1}(\lambda f(X))$ abbilden. M ist abgeschlossen in Z: Ist (f_n) eine Folge in M mit $f = \lim f_n \in Z$, so ist wegen $\dim f(X) \geqslant \lim \dim f_n(X)$ auch $f : X \to \lambda^{-1}(\lambda f(X))$ eine surjektive Abbildung. Wegen 5.2 ist dann $f \in Z$. Da M auch offen in Z ist, gilt $M = Z$. Wir erhalten somit ein kommutatives Diagramm

$$\begin{array}{ccc} Z \times X & \xrightarrow{\Phi} & Y \\ {\scriptstyle\pi}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle\lambda}, \\ Z & \xrightarrow[\mu]{} & B \end{array}$$

wobei π die kanonische Projektion auf den ersten Faktor und μ ein kompakte holomorphe Abbildung ist. Seien (f_n), (g_n) zwei Folgen in Z mit $\mu(f_n) = \mu(g_n)$ für alle n und $\lim f_n = \lim g_n$. Dann konvergiert die Folge $(f_n^{-1} g_n)$ in $\mathrm{Aut}(X)$ gegen die Identität. Da $\mathrm{Aut}(X)$ endlich ist, folgt $f_n = g_n$ für $n > n_0$, d.h. μ ist eine unverzweigte Überlagerungsabbildung, d.h. $\lambda : Y \to B$ ist ein holomorphes Faserbündel.

LITERATUR

[1] H. Behnke und F. Sommer, Theorie der analytischen Funktionen einer komplexen Veränderlichen, Springer 1955.

[2] H. Behnke und P. Thullen, Theorie der Funktionen mehrerer komplexer Veränderlichen, *Erg. d. Math*, **3**, Berlin: Springer 1934.

[3] S. Bochner and W. T. Martin, Several Complex Variables, *Princeton University Press* 1948.

[4] S. Bochner and D. Montgomery, Groups on analytic manifolds, *Ann. of Math.*, **48**, 659-669 (1947).

[5] A. Borel and R. Narasimhan, Uniqueness Conditions for Certain Holomorphic Mappings, *Inventiones math.*, **2**, 247-255 (1967).

[6] H. Cartan, Quotients of complex analytic spaces, *Intern. Coll. Funct. Theory*, Tata Inst. Bombay, 1-15 (1960).

[7] F. Docquier und H. Grauert, Levisches Problem und Rungescher Satz für Teilgebiete Steinscher Mannigfaltigkeiten, *Math. Ann.*, **140**, 94-123 (1960).

[8] A. Douady, Le problème des modules pour les sous-espaces analytiques compacts d'un espace analytique donné, *Ann. Inst. Fourier*, **16**, 1-95 (1966).

[9] W. Fischer und H. Grauert, Lokal-triviale Familien kompakter komplexer Mannigfaltigkeiten, *Nachrichen d. Akad. d. Wiss.*, Göttingen 1965.

[10] H. Grauert, Ein Theorem der analytischen Garbentheorie., *Publ. Math.*, **5**, 233-292 (1960).

[11] H. Grauert und H. Reckziegel, Hermitesche Metriken und normale Familien holomorpher Adbbildungen, *Math. Zeitschr*, **89**, 108-125 (1965).

[12] H. Grauert und R. Remmert, Komplexe Räume, *Math. Ann.*, **136,** 245-318 (1958).

[13] H. Grauert, Plurisubharmonische Funktionen in komplexen Räumen, *Math. Zeitschr.*, **65**, 175-194 (1956).

[14] H. Holmann, Zur Regularität holomorpher Abbildungen zwischen komplexen Räumen, *Math. Ann.*, **172**, 17-32 (1967).

[15] W. Kaup, Infinitesimale, Transformationsgruppen komplexer Räume, *Math. Ann.*, **160**, 72-92 (1965).

[16] W. Kaup, Reelle Transformationsgruppen und invariante Metriken auf komplexen Räumen, *Inventiones math.*, **3**, 43-70 (1967).

[17] W. Kaup, Holomorphe Abbildungen in hyperbolische komplexe Räume, Erscheint im Sammelband: Geometry of homogeneous bounded domains, *C.I.M.E. Urbino* 1967.

[18] H. Kerner, Über die Automorphismengruppen kompakter komplexer Räume, *Arch. Math.*, **11**, 282-288 (1960).

[19] S. Kobayashi, On the automorphism group of a certain class of algebraic manifolds, *Tohoku Math. J.*, **11**, 184-190 (1959).

[20] S. KOBAYASHI, Intrinsic metrics on complex manifolds, *Bull. Amer. Math. Soc.*, **73**, 347-349 (1967).

[21] K. PETERS, Über holomorphe und meromorphe Abbildungen gewisser kompakter komplexer Mannigfaltigkeiten. *Arch. Math.*, **15**, 222-231 (1964).

[22] H. RECKZIEGEL, Hyperbolische Räume und normale Familien holomorpher Abbildungen, Dissertation Göttingen 1967.

[23] H. J. REIFFEN, Die Carathéodorysche Distanz und ihre zugehörige Differentialmetrik, *Math. Ann.*, **161**, 315-324 (1965).

[24] R. REMMERT, Holomorphe und meromorphe Abbildungen komplexer Räume, *Math. Ann.*, **133**, 328-370 (1957).

[25] H. ROSSI, Vector fields on analytic spaces, *Ann. Math.*, **78**, 455-467 (1963).

Manuscrit reçu le 17 février 1968

Wilhem KAUP,
Mathematisches Institut I
der Universität
44-Münster (Allemagne)