ANNALES DE L'INSTITUT FOURIER

RENZO CAIROLI

Une représentation intégrale pour fonctions séparément excessives

Annales de l'institut Fourier, tome 18, nº 1 (1968), p. 317-338

<http://www.numdam.org/item?id=AIF_1968__18_1_317_0>

Ann. Inst. Fourier, Grenoble
18, 1 (1968), 317-338

UNE REPRÉSENTATION INTÉGRALE POUR FONCTIONS SÉPARÉMENT EXCESSIVES

par R. CAIROLI*

1. Introduction.

La théorie des frontières de Martin a été étendue récemment, par H. Kunita et T. Watanabe [1], au cas général des processus standards vérifiant une hypothèse, dénommée (B), plus faible que les hypothèses (F) et (G) de Hunt ([2], p. 154 et 170). La méthode suivie par les deux auteurs est analogue à la méthode de R.S. Martin [3]. Néanmoins les solutions qu'ils ont apportées aux nouveaux problèmes, issus du cadre probabiliste, ont un caractère original et élégant.

Dans le présent travail, on considèrera deux processus standards, à valeurs respectivement dans S^1 et S^2 et vérifiant l'hypothèse (B). On s'occupera, plus particulièrement, de la famille des fonctions mesurables dans $S^1 \times S^2$, excessives en chacune des deux variables quand l'autre est fixée (fonctions séparément excessives)(¹). On établira que les fonctions f de cette famille, qui sont intégrables par rapport à une mesure de référence $r_1 \otimes r_2$, admettent une représentation de la forme

$$f = \int \kappa_1(.\,,x)\,\kappa_2(.\,,y)\,d\mu(x\,,y)\,,$$

au moyen d'une mesure μ sur le produit des compactifiés de Martin de S^1 et S^2, si et seulement si, (G^1_α) et (G^2_α) désignant les résolvantes respectives des deux processus,

$$\alpha G^1_\alpha f + \beta G^2_\beta f \leqslant f + \alpha\beta(G^1_\alpha \otimes G^2_\beta) f\,,$$

pour tout $\alpha > 0$, $\beta > 0$.

* Subventionné par le Fonds national suisse de la recherche scientifique.

(¹) L'hypothèse de mesurabilité n'est pas nécessaire si les résolvantes des deux processus sont fortement fellériennes ([4], théorème 11) mais, dans la suite, on ne supposera pas que les résolvantes sont fortement fellériennes.

Cette dernière condition est en général restrictive. Elle est toutefois vérifiée par les fonctions f, susdites, qui sont harmoniques de l'une au moins des deux variables et par celles de la forme $h \otimes g$.

Parallèlement, on étudiera la question de l'unicité de la représentation intégrale.

L'étude de la possibilité de cette représentation est d'autant mieux justifiée que le produit des deux processus standards (cf. [4] et appendice) ne vérifie plus, en général, l'hypothèse (B) et que les résultats de [1] ne peuvent donc pas être utilisés sur l'espace produit $S^1 \times S^2$ (il faut rappeler qu'une fonction séparément excessive est excessive pour le processus produit).

Dans le cadre de l'axiomatique de Brelot, une représentation intégrale des fonctions séparément harmoniques positives a déjà été obtenue par K. Gowrisankaran [5].

On suivra ici le chemin tracé dans [1], en faisant un large usage des résultats qui y sont énoncés. On omettra les démonstrations qui ne demandent que des modifications mineures par rapport à celles qui ont été présentées dans [1].

2. Préliminaires.

On utilisera les notations et la terminologie de [1]. S sera un espace localement compact, non compact et à base dénombrable, $\mathfrak{A}$ la tribu des ensembles universellement mesurables de S et $X = (\Omega, (X_t)_{t \geq 0}, (P_x)_{x \in S})$ un processus standard(2) à valeurs dans S et de durée de vie ζ. Si f est une fonction $\mathfrak{A}$-mesurable, on posera $f(X_t(\omega)) = 0$ pour $t \geqslant \zeta(\omega)$. On désignera par (H_t) et (G_α) respectivement le semi-groupe de transition et la résolvante associés au processus. Le temps d'entrée dans l'ensemble B sera noté T(B) :

$$T(B) = \inf\{t \geqslant 0 : X_t \in B\}$$

s'il existe de tels t, $= \zeta$ sinon. Pour tout ensemble borélien B, on notera $H_B(x\,,.)$ la mesure dont la valeur pour l'ensemble universellement mesurable A est $P_x\{X_{T(B)} \in A\}$. En outre, on notera C_0, B_0 et

(2) H. Kunita et T. Watanabe ont d'abord supposé que X est un processus de Hunt transient. Ensuite, ils ont démontré ([1], paragraphe 14) que, sous l'hypothèse (B), leurs résultats restent vrais pour n'importe quel processus standard.

$L_0(\mu)$ les espaces des fonctions sur S, respectivement continues à support compact, $\mathcal{A}$-mesurables bornées à support compact et localement intégrables par rapport à μ.

Soit m une mesure sur S, finie pour tout compact. On dit que (G_α) est en dualité avec une résolvante $(\hat{G}_\alpha)$ (appelée parfois co-résolvante), par rapport à la mesure m si, pour tout $f, g \in C_0$ (et alors pour tout $f, g \in B_0$) et tout $\alpha > 0$,

$$< f, G_\alpha g > = < \hat{G}_\alpha f, g >,$$

où $< . , . >$ désigne le produit scalaire par rapport à m.

L'hypothèse suivante (cf. [1], p. 498) sera supposée vérifiée :

Hypothèse (B). – (G_α) est en dualité avec $(\hat{G}_\alpha)$ par rapport à m ; (G_α) est absolument continue par rapport à m(3) ; pour tout compact K, $G_0(. , K)$ est localement bornée ; pour tout $f \in B_0$ et tout $\alpha \geqslant 0$, $\hat{G}_\alpha f$ est continue et finie ; pour tout $f \in C_0$, la suite $\{\alpha \hat{G}_\alpha f\}$ converge vers f, en restant bornée sur tout compact, quand $\alpha \longrightarrow \infty$.

La co-résolvante $(\hat{G}_\alpha)$ de cette hypothèse est unique. En outre, pour tout $\alpha \geqslant 0$, il existe une fonction (unique) $\mathcal{A} \times \mathcal{A}$-mesurable $G_\alpha(. , .)$ telle que ([1], théorème 1) :

(a) $$G_\alpha(x , dx') = G_\alpha(x , x')\, m(dx') ;$$

(b) $$\hat{G}_\alpha(x' , dx) = G_\alpha(x , x')\, m(dx) ;$$

(c) pour chaque x', $G_\alpha(. , x')$ est α-excessive (pour (G_α)) ;

(d) pour chaque x, $G_\alpha(x , .)$ est α-co-excessive (α-excessive pour $(\hat{G}_\alpha)$).

Afin de simplifier les notations, l'indice $\alpha = 0$ sera, dans la suite, souvent omis.

PROPOSITION 1. – *Une fonction excessive appartient à* $L_0(m)$ *si et seulement si elle est finie m-p.p.* ([1], proposition 7.1).

Une fonction universellement mesurable $f \geqslant 0$ (finie ou non) est dite harmonique si, pour tout ouvert relativement compact A, $f = H_{A^c} f$, où $A^c = S - A$. Toute fonction harmonique est excessive ([1], p. 491).

(3) Cela signifie que, pour tout $\alpha > 0$ et tout x, $G_\alpha(x , .)$ est absolument continue par rapport à m.

On dit qu'une fonction excessive $f \in L_0(m)$ est un potentiel si $\lim_{K \uparrow S} H_{K^c} f = 0$ *m-p.p.*(4).

On notera S_P l'ensemble des points x tels que $G(.\,,x)$ est un potentiel. S_P est un ensemble borélien.

3. Représentation intégrale d'un potentiel sur un espace produit.

Considérons deux processus standards $X = (\Omega^1, (X_t)_{t \geq 0}, (P_x)_{x \in S^1})$ et $Y = (\Omega^2, (Y_t)_{t \geq 0}, (P_y)_{y \in S^2})$, à valeurs respectivement dans les espaces localement compacts, non compacts et à base dénombrable S^1 et S^2 et vérifiant l'hypothèse (B). Conservons les notations du paragraphe précédent, mais affectons-les des indices 1 ou 2, selon qu'elles se rapportent au premier ou au second processus.

DEFINITION. – *Une fonction f sur* $S^1 \times S^2$ *sera dite séparément excessive (resp. surmédiane, harmonique) si elle est universellement mesurable et excessive (resp. surmédiane, harmonique) en chaque variable quand l'autre est fixée.*

Une fonction séparément excessive est nécessairement $\mathfrak{A}_1 \times \mathfrak{A}_2$-mesurable(5). C'est une conséquence immédiate de l'hypothèse (B).

PROPOSITION 2. – *Pour qu'une fonction séparément excessive appartienne à* $L_0(m_1 \otimes m_2)$ *il faut et il suffit qu'elle soit finie* $m_1 \otimes m_2$*-p.p.*

C'est une conséquence immédiate de la proposition 1.

DEFINITION. – *On dira qu'une fonction séparément excessive f (nécessairement dans* $L_0(m_1 \otimes m_2)$*) est un potentiel de la première* (resp. *seconde*) *variable si* $f(.\,,y)$ (resp. $f(x\,,.)$) *est un potentiel pour* m_2- (resp. m_1-) *presque tout* y (resp. x). *Un potentiel des deux variables sera appelé simplement potentiel. On dira que f est harmonique de la première* (resp. *seconde*) *variable, si elle est harmonique de cette variable pour chaque valeur de l'autre.*

(4) Par $K \uparrow S$ on entendra, dans toute la suite, que K croît vers S en parcourant une suite de compacts $\{K_n\}$ telle que $K_n \subset \overset{\circ}{K}_{n+1}$ pour tout n.

(5) Rappelons que $\mathfrak{A}_1 \times \mathfrak{A}_2$ est une sous-tribu de la tribu des ensembles universellement mesurables de $S^1 \times S^2$.

Désignons par $G\mu$ la fonction

$$(x\,,y) \longmapsto \int G^1(x\,,x')\,G^2(y\,,y')\,d\mu(x'\,,y')(^6)\,,$$

où μ est une mesure sur $S^1 \times S^2$. On dira que $G\mu$ est un potentiel au sens large si $G\mu \in L_0(m_1 \otimes m_2)$.

Les démonstrations des deux propositions suivantes sont analogues à celles des propositions 7.3, 7.4 et 7.5 de [1]. Les modifications à faire étant évidentes, on ne les donnera donc pas,

PROPOSITION 3. – *Si* $G\mu$ *est un potentiel au sens large,* μ *est finie pour tout compact. Si* $G\mu = 0$, *alors* $\mu = 0$.

PROPOSITION 4. – *Soit* $\{G\mu_n\}$ *une suite de potentiels au sens large majorée par une fonction de* $L_0(m_1 \otimes m_2)$.
Alors :

(a) *il existe au moins une limite vague de* $\{\mu_n\}$;

(b) μ *désignant une telle limite, si* $G\mu_n$ *converge* $m_1 \otimes m_2$*-p.p. vers* f, *alors* $\alpha\beta G^1_\alpha G^2_\beta f(^7)$ *croît en* α *et* β *et* $\lim\limits_{\substack{\alpha\to\infty\\ \beta\to\infty}} \alpha\beta G^1_\alpha G^2_\beta f \geqslant G\mu$;

(c) *la dernière limite est égale à* $G\mu$ *si, pour tout* $g \in C_0^{1+}$, $h \in C_0^{2+}$ *et pour tout* $\varepsilon > 0$, *il existe un compact* $K \subset S^1 \times S^2$ *tel que,*

$$\int_{K^c} \hat{G}^1 g \hat{G}^2 h \, d\mu_n \leqslant \varepsilon(^8)\,,$$

quel que soit n.

Il est facile de prouver qu'un potentiel au sens large d'une mesure portée par $S^1_P \times S^2_P$ est un potentiel. Réciproquement, est-ce que tout potentiel f est le potentiel au sens large d'une telle mesure ? On constate immédiatement que, pour que cela se vérifie, la condition suivante est nécessaire :

(H) Pour tout $\alpha > 0, \beta > 0, \alpha G^1_\alpha f + \beta G^2_\beta f \leqslant f + \alpha\beta G^1_\alpha G^2_\beta f$.

(6) Soulignons que les conventions usuelles $0 \,.\, \infty = 0$ et $\infty \,.\, \infty = \infty$ sont adoptées tout au long de ce travail.

(7) Le noyau $G^1_\alpha \otimes G^2_\beta$ sera toujours noté $G^1_\alpha G^2_\beta$ (théorème de Fubini).

(8) Pour simplifier les notations, on écrira gh plutôt que $g \otimes h$.

Pour une fonction séparément excessive finie, cette condition n'exprime rien d'autre que $f - \alpha G^1_\alpha f$ (et donc $f - \beta G^2_\beta f$) est une fonction excessive de la seconde (resp. première) variable, quel que soit $\alpha > 0$ (resp. $\beta > 0$). On voit donc immédiatement que, pour de tels f, la condition (H) est équivalente à la suivante : pour tout $s \geqslant 0$, $t \geqslant 0$, $H^1_s f + H^2_t f \leqslant f + H^1_s H^2_t f$. Cette équivalence subsiste pour les f non nécessairement finies (voir aussi le paragraphe 4).

Désignons par $\mathcal{H}$ le cône des fonctions séparément excessives de $\mathbf{L}_0(m_1 \otimes m_2)$ vérifiant (H). $\mathcal{H}$ contient les fonctions de la forme gh, où g est une fonction excessive de $\mathbf{L}_0(m_1)$ et h une fonction excessive de $\mathbf{L}_0(m_2)$, mais il ne contient pas, en général, toutes les fonctions séparément excessives de $\mathbf{L}_0(m_1 \otimes m_2)$. Soient en effet X et Y deux copies du processus de translation uniforme sur la droite. C'est un processus standard vérifiant l'hypothèse (B). Posons

$$f(x, y) = \begin{cases} 0 & \text{pour } \begin{array}{l} x \geqslant -1, y \geqslant 0 \\ x \geqslant \ \ 0, y < 0 \end{array} \\ 1 & \text{ailleurs}. \end{cases}$$

f est une fonction séparément excessive qui ne satisfait pas à la condition (H).

PROPOSITION 5. – *Supposons que $f \in \mathcal{H}$ soit un potentiel de l'une au moins des deux variables, par exemple de la première. Il existe alors une suite de fonctions $f_n \in \mathcal{H}$ croissant vers f telle que, pour chaque n, $f_n(\,.\,, y)$ est un potentiel borné pour m_2-presque tout y.*

Du fait que la borne inférieure de deux fonctions de $\mathcal{H}$ n'appartient pas nécessairement à $\mathcal{H}$, cette proposition nécessite la démonstration assez compliquée que voici :

Soit Λ l'ensemble des y tels que $f(\,.\,, y)$ est un potentiel. Par hypothèse, $m_2(\Lambda^c) = 0$. En vertu des propositions 7.6 et 7.11 de [1], pour chaque $y \in \Lambda$, on a

$$\text{(a)} \qquad f(x, y) = \int G^1(x, x')\, d\mu_y(x'),$$

où la mesure $\mu_y(.)$ est la limite vague de la suite

$$\left\{ \int ((f \wedge n)(x', y) - n G^1_n (f \wedge n)(x', y))\, dm_1(x') \right\}.$$

Posons $\mu_y = 0$ pour $y \in \Lambda^c$. Alors l'application $y \longmapsto \mu_y(A_1)$ est mesurable pour m_2, quel que soit l'ensemble $A_1 \in \mathfrak{A}_1$. En outre,

$$\beta G_\beta^2 f(x, y) = \int \beta G_\beta^2 (y, y') f(x, y') \, dm_2(y')$$
$$= \int \beta G_\beta^2 (y, y') \, dm_2(y') \int G^1(x, x') \, d\mu_y(x').$$

Désignons par $\beta G_\beta^2 \mu_y$ la mesure dont la valeur pour A_1 est

$$\int \beta G_\beta^2 (y, y') \mu_{y'}(A_1) \, dm_2(y').$$

En raison de la relation précédente, on a

$$\text{(b)} \qquad \beta G_\beta^2 f(x, y) = \int G^1(x, x') \, d(\beta G_\beta^2 \mu_y)(x').$$

Montrons que $\beta G_\beta^2 \mu_y \leqslant \mu_y$ pour tout $y \in \Lambda$. A cet effet, fixons $y \in \Lambda$ et $\beta > 0$. Comme f appartient à $\mathcal{H}$, $\alpha G_\alpha^1(f(\cdot, y) - \beta G_\beta^2 f(\cdot, y))$ croît vers une limite excessive g quand $\alpha \longrightarrow \infty$. En outre,

$$\text{(c)} \qquad g(x) = f(x, y) - \beta G_\beta^2 f(x, y)$$

sur l'ensemble des x tels que $f(x, y) < \infty$. Comme le complémentaire de cet ensemble est polaire, $H_{K_1^c}^1 g \leqslant H_{K_1^c}^1 f(\cdot, y)$, ce qui entraîne que g est un potentiel et donc que $g(x) = \int G^1(x, x') \, d\nu(x')$. Il s'ensuit, compte tenu de (a), (b) et (c), que

$$\int G^1(x, x') \, d\nu(x') + \int G^1(x, x') \, d(\beta G_\beta^2 \mu_y)(x') = \int G^1(x, x') \, d\mu_y(x').$$

Par conséquent, $\nu + \beta G_\beta^2 \mu_y = \mu_y$ ([1], proposition 7.11), ce qui prouve que $\beta G_\beta^2 \mu_y \leqslant \mu_y$. Cela établi, posons

$$f_n'(x, y) = \int_{K_1^n} G^1(x, x') \wedge n \, d\mu_y(x')$$

où le compact K_1^n croît vers S^1 quand $n \longrightarrow \infty$. Pour chaque y, $f_n'(\cdot, y)$ est un potentiel borné. En outre, si $y \in \Lambda$,

$$\beta G_\beta^2 f_n'(x, y) = \int \beta G_\beta^2 (y, y') \, dm_2(y') \int_{K_1^n} G^1(x, x') \wedge n \, d\mu_{y'}(x')$$
$$= \int_{K_1^n} G^1(x, x') \wedge n \, d(\beta G_\beta^2 \mu_y)(x')$$
$$\leqslant \int_{K_1^n} G^1(x, x') \wedge n \, d\mu_y(x') = f_n'(x, y),$$

pour tout x. Posons donc

$$f_n(x, y) = \lim_{\beta \to \infty} \beta G_\beta^2 f_n'(x, y).$$

La suite $\{f_n\}$ ainsi définie a les propriétés requises. En effet, pour chaque n, f_n est une fonction séparément excessive et, pour $y \in \Lambda$, $f_n(., y)$ est un potentiel borné. En outre, f_n croît vers f quand $n \longrightarrow \infty$. Il reste donc seulement à démontrer que $f_n \in \mathcal{H}$. A cet effet, fixons $\alpha > 0$ et posons

$$g(x, x') = I_{K_1^n}(x')\, G^1(x, x') \wedge n,$$

$$h(x, y) = f_n'(x, y) - \alpha G_\alpha^1 f_n'(x, y).$$

On a, d'après la définition de f_n',

$$h(x, y) = \int (g(x, x') - \alpha G_\alpha^1 g(x, x'))\, d\mu_y(x') (^9)$$

et donc, si $(x, y) \in S^1 \times \Lambda$, $\beta > 0$,

$$\beta G_\beta^2 h(x, y) = \int \beta G_\beta^2(y, y')\, dm_2(y') \int (g(x, x') - \alpha G_\alpha^1 g(x, x'))\, d\mu_{y'}(x')$$

$$= \int (g(x, x') - \alpha G_\alpha^1 g(x, x'))\, d(\beta G_\beta^2 \mu_y)(x')$$

$$\leqslant \int (g(x, x') - \alpha G_\alpha^1 g(x, x'))\, d\mu_y(x') = h(x, y).$$

Il en résulte

$$\alpha G_\alpha^1 f_n(x, y) + \beta G_\beta^2 f_n(x, y) \leqslant f_n(x, y) + \alpha\beta G_\alpha^1 G_\beta^2 f_n(x, y),$$

$m_1 \otimes m_2$-*p.p.*, donc partout, ce qui achève la démonstration.

THEOREME 1. – *Soit f un potentiel de $\mathcal{H}$. Il existe une mesure μ, portée par $S_P^1 \times S_P^2$, telle que $f = G\mu$* [10].

Désignons par $\{f_n\}$ une suite croissant vers f et ayant les propriétés énoncées dans la proposition précédente et supposons avoir pu montrer que, pour chaque n, $nG_n^1 f_n = G\mu_n$. Soit alors μ une limite vague de $\{\mu_n\}$ (proposition 4(a)). Afin de vérifier la condition de la proposition 4(c), considérons un $\varepsilon > 0$ et deux fonctions $g \in C_0^{1+}$, $h \in C_0^{2+}$. On a

(9) $G_\alpha^1 g(x, x') = \int G_\alpha^1(x, dz)\, g(z, x')$.

(10) On a déjà remarqué que la réciproque est facile à démontrer.

$$\int_{(K_1 \times K_2)^c} \hat{G}^1 g \hat{G}^2 h \, d\mu_n \leqslant \int_{K_1^c \times S^2} \hat{G}^1 g \hat{G}^2 h \, d\mu_n + \int_{S^1 \times K_2^c} \hat{G}^1 g \hat{G}^2 h \, d\mu_n .$$

Montrons, par exemple, que le premier terme du membre de droite est majoré par ε, dès que le compact K_1 est suffisamment grand. Comme $H^1_{K_1^c} G^1(.\,,x') = G^1(.\,,x')$(11) pour tout $x' \in K_1^c$ ([1], proposition 6.2), ce terme est majoré par

$$< gh \, , H^1_{K_1^c}(G\mu_n) > \leqslant < gh \, , H^1_{K_1^c} f > \text{(12)}$$

et tend donc vers 0 quand $K_1 \uparrow S^1$. On en déduit que $f = G\mu$.

En outre, pour chaque $(x', y') \in S_P^{1c} \times S^2$,

$$m_1 \otimes m_2\{(x, y) : \lim_{K_1 \uparrow S^1} H^1_{K_1^c} G^1(x, x') G^2(y, y') > 0\} > 0 ,$$

ce qui entraîne $\mu(S_P^{1c} \times S^2) = 0$, puisque

$$\int \lim_{K_1 \uparrow S^1} H^1_{K_1^c} G^1(x, x') G^2(y, y') \, dm_1(x) \otimes dm_2(y) \otimes d\mu(x', y') = 0 .$$

On a de même $\mu(S^1 \times S_P^{2c}) = 0$, ce qui prouve que μ est portée par $S_P^1 \times S_P^2$. Il reste donc seulement à démontrer que $nG_n^1 f_n = G\mu_n$. A cet effet, fixons n et appelons Λ l'ensemble des y tels que $f_n(.\,, y)$ est un potentiel borné. On a, pour $y \in \Lambda$,

(a) $G_n^1 f_n(x, y) = \int G^1(x, x')(f_n(x', y) - nG_n^1 f_n(x', y)) \, dm_1(x')$(13).

D'autre part, comme $f_n \in \mathcal{H}$, x étant fixé,

$$\beta G_\beta^2 (f_n(x, .) - nG_n^1 f_n(x, .))$$

croît, quand $\beta \longrightarrow \infty$, vers une fonction excessive $g(x, .)$ telle que

(b) $\qquad g(x, y) = f_n(x, y) - nG_n^1(x, y)$, pour tout $y \in \Lambda$.

En outre, $g(x, y) \leqslant f_n(x, y)$ pour tout $y \in \Lambda$, donc partout. Il s'ensuit que, si l'on exclut un ensemble m_1-négligeable de x, $g(x, .)$ est un potentiel, donc de la forme

(11) $H^1_{K_1^c} G^1(.\,, x')$ dénote la fonction $\int H^1_{K_1^c}(.\,, dx) \, G^1(x, x')$.

(12) $< .\,, . >$ désigne le produit scalaire par rapport à $m_1 \otimes m_2$.

(13) On sait que, f désignant une fonction excessive de $L_0(m)$, on a $G_\alpha f = G_0(f - \alpha G_\alpha f)$ si et seulement si $G_\alpha f$ est un potentiel de la classe (D) de Meyer.

(c) $$g(x\,,.) = \int G^2(.\,,y')\,d\nu_x(y')\,.$$

Posons $\nu_x = 0$, si cette représentation n'a pas lieu pour x, et appelons μ la mesure dont la valeur pour $A \in \mathcal{A}_1 \times \mathcal{A}_2$ est $\int \nu_x(A^x)\,dm_1(x)$. De (a), (b) et (c) il résulte finalement, pour tout $(x\,,y) \in S^1 \times \Lambda$, donc partout,

$$G^1_n f_n(x\,,y) = \int G^1(x\,,x')\,dm_1(x') \int G^2(y\,,y')\,d\nu_{x'}(y')$$
$$= \int G^1(x\,,x')\,G^2(y\,,y')\,d\mu(x'\,,y')\,,$$

ce qui achève la démonstration.

Voici deux corollaires du théorème 1.

PROPOSITION 6. – *Tout potentiel $f \in \mathcal{H}$ est la limite d'une suite croissante $\{f_n\}$ de potentiels bornés de $\mathcal{H}$.*

En effet, si $f = G\mu$, il n'y a qu'à poser

$$f_n(x\,,y) = \int_{K_1^n \times K_2^n} (G^1(x\,,x') \wedge n)\,(G^2(y\,,y') \wedge n)\,d\mu(x'\,,y')\,,$$

où les compacts K_1^n et K_2^n croissent respectivement vers S^1 et S^2, quand $n \longrightarrow \infty$.

PROPOSITION 7. – *Soit f un potentiel de $\mathcal{H}$. Alors $H^1_{A_1} H^2_{A_2} f$ est le potentiel au sens large d'une mesure portée par $\overline{A}_1 \times \overline{A}_2$, quel que soit l'ouvert* $A_1 \times A_2$(¹⁴).

On a $f = G\mu$, où μ est une mesure portée par $S^1_P \times S^2_P$. D'autre part ([1], proposition 7.9), pour chaque $x \in S^1_P$ (resp. $y \in S^2_P$),

$$H^1_{A_1} G^1(.\,,x) = \int G^1(.\,,x')\,d\mu_x(x')$$

(resp. $H^2_{A_2} G^2(.\,,y) = \int G^2(.\,,y')\,d\mu_y(y')$), où μ_x (resp. μ_y) est une mesure portée par $\overline{A}_1$ (resp. $\overline{A}_2$). Posons $\mu_x = \mu_y = 0$ pour $x \in S^{1c}_P$ et $y \in S^{2c}_P$. Alors la mesure

$$\nu(.) = \int (\mu_x \otimes \mu_y)(.)\,d\mu(x\,,y)$$

(¹⁴) $\overline{A}$ dénote l'adhérence de A.

est portée par $\overline{A}_1 \times \overline{A}_2$, et l'on a

$$H^1_{A_1} H^2_{A_2} f = \int H^1_{A_1} G^1(\cdot\,, x) H^2_{A_2} G^2(\cdot\,, y)\, d\mu(x\,, y) = G\nu\,,$$

ce qui achève la démonstration.

La prochaine proposition se démontre à l'aide de la précédente. La démonstration étant analogue à celle de la proposition 7.11 dans [1], on ne la donnera pas.

PROPOSITION 2. – *Soient f une fonction de* $L_0(m_1 \otimes m_2)$, *μ et ν deux mesures telles que* $f = G\mu = G\nu$. *Alors* $\mu = \nu$.

4. Décomposition de Riesz.

Ce paragraphe traitera de la décomposition des fonctions de $\mathcal{H}$ en une partie potentiel, une partie harmonique et une partie mixte.

PROPOSITION 9. – *Pour une fonction séparément excessive f, la condition* (H) *est équivalente à la suivante : quels que soient $\beta > 0$ et l'ensemble borélien relativement compact* A_1 , *on a*

$$H^1_{A_1^c} f + \beta G^2_\beta f \leqslant f + \beta H^1_{A_1^c} G^2_\beta f \; (^{15}).$$

Posons $g = f - \beta G^2_\beta f$ sur $\{f < \infty\}$, $g = \infty$ ailleurs. Si f satisfait à (H), alors $\alpha G^1_\alpha g \leqslant g$ pour tout α, donc $H^1_{A_1^c} h \leqslant h$, où $h = \lim\limits_{a \to \infty} \alpha G^1_\alpha g$. En outre, $h = g$ sur $\{f < \infty\}$. Par conséquent, si $f(x\,, y) < \infty$,

$$H^1_{A_1^c} h(x\,, y) = E_x\{f(X_{T(A_1^c)}\,, y)\} - E_x\{\beta G^2_\beta f(X_{T(A_1^c)}\,, y)\}\,,$$

puisque $\{x' : f(x'\,, y) < \infty\}$ est un ensemble absorbant ([6], p. 171). On en déduit l'inégalité de la proposition. Réciproquement, si cette inégalité a lieu, alors $H^1_{A_1^c} g \leqslant g$, donc $\alpha G^1_\alpha g \leqslant g$, ce qui entraîne (H).

PROPOSITION 10. – *Toute fonction séparément excessive qui est harmonique de l'une au moins des deux variables vérifie* (H).

C'est un corollaire immédiat de la proposition 9.

(15) La proposition reste vraie si l'on supprime "relativement compact".

PROPOSITION 11. – *Soient f et h deux fonctions séparément excessives. Si $f + h$ est une fonction de $\mathcal{H}$ et si h est harmonique de l'une au moins des deux variables, alors f appartient à $\mathcal{H}$.*

En remplaçant f par $f + h$ dans l'inégalité de la proposition 9 et en utilisant le fait que h est harmonique de la première variable, on obtient l'inégalité $H^1_{A_1^c} f + \beta G^2_\beta f \leqslant f + \beta H^1_{A_1^c} G^2_\beta f$, sur $\{h < \infty\}$. Il ne reste qu'à poser $g = f - \beta G^2_\beta f$ sur $\{f + h < \infty\}$, $g = \infty$ ailleurs et conclure comme dans la démonstration de la proposition 9.

PROPOSITION 12. – *Soit f une fonction de $\mathcal{H}$. Alors*

$$g = \begin{cases} f - \lim\limits_{K_1 \uparrow S^1} H^1_{K_1^c} f & \textit{sur } \{f < \infty\}, \\ \infty & \textit{ailleurs,} \end{cases}$$

est une fonction séparément surmédiane.

Désignons par h la limite figurant dans cet énoncé. On a $f = g + h$, donc, A_1 dénotant un borélien relativement compact,

$$H^1_{A_1^c} g + H^1_{A_1^c} h \leqslant g + h .$$

Comme $H^1_{A_1^c} h = h$ sur $\{f < \infty\}$, on doit avoir $H^1_{A_1^c} g \leqslant g$ et, par conséquent, $\alpha G^1_\alpha g \leqslant g$. Pour prouver que $\beta G^2_\beta g \leqslant g$, posons $g_{K_1} = f - H^1_{K_1^c} f$ sur $\{f < \infty\}$ et $g_{K_1} = \infty$ ailleurs. En vertu de la proposition 9, on a $\beta G^2_\beta g_{K_1} \leqslant g_{K_1}$, ce qui achève la démonstration, puisque $g_{K_1} \uparrow g$ quand $K_1 \uparrow S^1$.

THEOREME 2. – *Toute fonction f de $\mathcal{H}$ admet une décomposition unique de la forme*

$$f = p + h_1 + h_2 + h ,$$

où : p est un potentiel ;

h_1 (resp. h_2) *est harmonique de la première* (resp. *seconde*) *variable et un potentiel de la seconde* (resp. *première*) *variable ;*

h *est séparément harmonique.*

Désignons par h' la limite $\lim H^1_{K_1^c} H^2_{K_2^c} f$[16] et par A_1, A_2 deux boréliens relativement compacts. Posons $g' = f - h'$ sur $\{f < \infty\}$, $g' = \infty$ ailleurs. Alors $f = g' + h'$. En outre, comme $H^1_{A_1^c} h' = H^2_{A_2^c} h' = h'$ sur $\{f < \infty\}$, on a $\lim H^1_{K_1^c} H^2_{K_2^c} g' = 0$ sur $\{f < \infty\}$, $H^1_{A_1^c} g' \leqslant g'$ et $H^2_{A_2^c} g' \leqslant g'$. Par conséquent, g' est séparément surmédiane et il en est de même de h', donc $g = \lim_{\alpha\to\infty} \alpha^2 G^1_\alpha G^2_\alpha g'$ et $h = \lim_{\alpha\to\infty} \alpha^2 G^1_\alpha G^2_\alpha h'$ sont séparément excessives, $f = g + h$ et, sur $\{f < \infty\}$, $\lim H^1_{K_1^c} H^2_{K_2^c} g = 0$ (a). En outre, $h = \lim H^1_{K_1^c} H^2_{K_2^c} h$ sur $\{f < \infty\}$, donc partout, ce qui prouve que h est séparément harmonique. Posons maintenant $h'_1 = \lim H^1_{K_1^c} g$, $g'_1 = g - h'_1$ sur $\{g < \infty\}$, $g'_1 = \infty$ ailleurs[17]. Alors $g = g'_1 + h'_1$. Comme g appartient à $\mathcal{H}$ (proposition 11), g'_1 est séparément surmédiane (proposition 12). Par conséquent,

$$g_1 = \lim_{\alpha\to\infty} \alpha^2 G^1_\alpha G^2_\alpha g'_1 \quad \text{et} \quad h_1 = \lim_{\alpha\to\infty} \alpha^2 G^1_\alpha G^2_\alpha h'_1$$

sont séparément excessives. On a, en outre, $g = g_1 + h_1$, $\lim H^1_{K_1^c} g_1 = 0$ sur $\{g < \infty\}$ (b) et $h_1 = \lim H^1_{K_1^c} h_1$. Cette dernière relation montre que h_1 est harmonique de la première variable et donc, en vertu de (a), un potentiel de la seconde variable. Passons finalement à la décomposition de g_1. Posons $h'_2 = \lim H^2_{K_2^c} g_1$, $p' = g_1 - h'_2$ sur $\{g_1 < \infty\}$, $p' = \infty$ ailleurs. Une seconde application des propositions 11 et 12 montre que p' est séparément surmédiane. Les fonctions

$$p = \lim_{\alpha\to\infty} \alpha^2 G^1_\alpha G^2_\alpha p' \quad \text{et} \quad h_2 = \lim_{a\to\infty} \alpha^2 G^1_\alpha G^2_\alpha h'_2$$

sont donc séparément excessives et $g_1 = p + h_2$. En outre, p est un potentiel de la seconde variable et h_2 est harmonique de la même variable. D'après (b), ces deux fonctions sont des potentiels de la première variable, ce qui prouve l'existence de la décomposition annoncée. On voit facilement que cette décomposition est unique.

Comme corollaire des théorèmes 1 et 2 et de la proposition 8, on a le

(16) Au cours de la démonstration, les passages à la limite

$$\lim_{K_1 \times K_2 \uparrow S^1 \times S^2}, \quad \lim_{K_1 \uparrow S^1} \quad \text{et} \quad \lim_{K_2 \uparrow S^2}$$

seront désignés simplement par lim.

(17) Soulignons que les fonctions munies des indices 1 ou 2 intervenant dans la démonstration sont des fonctions sur $S^1 \times S^2$.

THEOREME 3. – *Toute $f \in \mathcal{H}$ peut être représentée de manière unique dans la forme*

$$f = \int_{S_P^1 \times S_P^2} G^1(.\,, x)\, G^2(.\,, y)\, d\mu(x\,, y) + h_1 + h_2 + h\,,$$

où h_1, h_2 et h sont définies comme dans le théorème 2 et μ est une mesure sur $S_P^1 \times S_P^2$.

6. Réduites généralisées.

Rappelons tout d'abord quelques notions et résultats supplémentaires. Une mesure r sur S, finie pour tout compact, est dite mesure de référence, si

$$rG = \int G(x\,,.)\, dr(x)$$

est une fonction continue (finie ou non) et strictement positive partout. On notera $\mathbf{L}(r)$ l'espace des fonctions intégrables par rapport à r et S_r l'ensemble $\{x : rG(x) < \infty\}$. Une fonction excessive de $\mathbf{L}(r)$ appartient à $\mathbf{L}_0(m)$ ([1], proposition 9.1). Posons

$$\kappa(x\,, x') = \begin{cases} G(x\,, x')/rG(x') & \text{si} \quad x' \in S_r\,, \\ 0 & \text{si} \quad x' \in S_r^c\,, \end{cases}$$

$$f\kappa = \int \kappa(x\,,.)\, f(x)\, dm(x)\,.$$

Pour tout $f \in \mathbf{B}_0$, $f\kappa$ est une fonction continue et bornée. La frontière de Martin de S relative au noyau κ ([1], p. 509 ; [3], p. 147) sera notée S'. $S + S'$ est un espace métrique compact, S est un sous-ensemble ouvert dense de $S + S'$ et sa topologie relative coïncide avec la topologie donnée. Le prolongement continu de $f\kappa$ à $S + S'$ sera désigné par le même symbole. Le noyau κ peut être prolongé de manière unique à $S \times (S + S')$ de telle manière que, pour tout $\xi \in S'$, $\kappa(.\,, \xi)$ est une fonction excessive et, pour tout $f \in \mathbf{C}_0$, $\xi \in S'$,

$$f\kappa(\xi) = \int \kappa(x\,, \xi)\, f(x)\, dm(x)$$

([1], théorème 3). Le noyau ainsi prolongé est mesurable par rapport au produit de $\mathfrak{A}$ et de la tribu des ensembles universellement mesurables de $S + S'$. En outre, $\kappa(x\ ,.)$ est semi-continue inférieurement.

Soient A un sous-ensemble borélien de $S + S'$ et f une fonction excessive de $L_0(m)$. Il existe une fonction excessive $\overline{H}_A f$ (unique), dite réduite de f relative à A, telle que $\overline{H}_A f = \inf\{H_{B \cap S} f : B$ ouvert contenant A$\}$ *m-p.p.* ([1], proposition 10.1).

Reprenons le cas de deux espaces S^1 et S^2. La démonstration de la proposition suivante est analogue à celle des propositions 10.1-10-4 dans [1]. Elle sera donc omise.

PROPOSITION 13. – *Soient f une fonction séparément excessive de $L_0(m_1 \otimes m_2)$ et A_1 un sous-ensemble borélien de $S^1 + S^1$. Alors la fonction*

$$g = \inf\{H^1_{B_1 \cap S^1} f : B_1 \textit{ ouvert contenant } A_1\}$$

est universellement mesurable, donc séparément surmédiane. Sa régularisée séparément excessive

$$\overline{\overline{H}}{}^1_{A_1} f = \lim_{\alpha \to \infty} \alpha^2 G^1_\alpha G^2_\alpha g$$

est dite réduite de f relative à A_1. En outre,

(a) *il existe une suite décroissante $\{B_1^n\}$ d'ouverts contenant A_1 et une suite croissante $\{C_1^n\}$ de compacts contenus dans A_1 telles que*

$$\overline{\overline{H}}{}^1_{A_1} f = \lim_{\alpha \to \infty} \alpha^2 G^1_\alpha G^2_\alpha (\lim_{n \to \infty} \overline{H}{}^1_{B_1^n} f) = \lim_{n \to \infty} \overline{H}{}^1_{C_1^n} f\ ;$$

(b) *si* $A_1 \subset S^{1'}$, $\overline{\overline{H}}{}^1_{A_1} f$ *est harmonique de la première variable ;*

(c) B_1 *étant un borélien tel que* $A_1 \subset B_1 \subset S^{1'}$, *on a*

$$\overline{\overline{H}}{}^1_{A_1} \overline{\overline{H}}{}^1_{B_1} f = \overline{\overline{H}}{}^1_{B_1} \overline{\overline{H}}{}^1_{A_1} f = \overline{\overline{H}}{}^1_{A_1} f\ ;$$

(d) *l'application* $(x\ ,y\ ,\xi\ ,\eta) \longmapsto \overline{\overline{H}}{}^1_{A_1}(\kappa_1(.\ ,\xi)\,\kappa_2(.\ ,\eta))(x\ ,y)$ *est universellement mesurable et, si μ désigne une mesure sur*

$$(S^1 + S^{1'}) \times (S^2 + S^{2'})\ ,$$

on a

$$\overline{\overline{H}}{}^1_{A_1}\left(\int \kappa_1(.,\xi)\,\kappa_2(.,\eta)\,d\mu(\xi,\eta)\right) = \int \overline{\overline{H}}{}^1_{A_1}(\kappa_1(.,\xi)\,\kappa_2(.,\eta))\,d\mu(\xi\ ,\eta).$$

La prochaine proposition établit une relation utile entre les réduites $\overline{\mathrm{H}}^1_{\mathrm{A}_1} f$ et $\overline{\overline{\mathrm{H}}}^1_{\mathrm{A}_1} f$.

PROPOSITION 14. – *f et A_1 étant définis comme dans la proposition précédente, pour m_2-presque tout y on a*

$$\overline{\overline{\mathrm{H}}}^1_{\mathrm{A}_1} f(.\,,y) = \overline{\mathrm{H}}^1_{\mathrm{A}_1} f(.\,,y)\,.$$

En effet, $\overline{\overline{\mathrm{H}}}^1_{\mathrm{A}_1} f = \lim\limits_{\beta\to\infty} \beta \mathrm{G}^2_\beta \,(\lim\limits_{\alpha\to\infty} \alpha \mathrm{G}^1_\alpha g)$, où g a le même sens que dans la proposition précédente. Donc, pour chaque x tel que

$$f(x\,,.) \in \mathrm{L}_0(m_2)\,,$$

le membre de droite est égal à $\lim\limits_{\alpha\to\infty} \alpha \mathrm{G}^1_\alpha g(x\,,.)$ m_2-*p.p.* ([1], proposition 7.2). Par conséquent, pour m_2-presque tout y,

$$\overline{\overline{\mathrm{H}}}^1_{\mathrm{A}_1} f(.\,,y) = \lim_{\alpha\to\infty} \alpha \mathrm{G}^1_\alpha g(.\,,y) = \overline{\mathrm{H}}^1_{\mathrm{A}_1} f(.\,,y)$$

m_1-*p.p.*, donc partout.

PROPOSITION 15. – *Soient* A_1 *et* A_2 *deux sous-ensembles boréliens respectivement de* $\mathrm{S}^{1'}$ *et* $\mathrm{S}^{2'}$ *et soit f une fonction de* $\mathcal{H}$. *Alors*

$$\overline{\overline{\mathrm{H}}}^1_{\mathrm{A}_1} \overline{\overline{\mathrm{H}}}^2_{\mathrm{A}_2} f = \overline{\overline{\mathrm{H}}}^2_{\mathrm{A}_2} \overline{\overline{\mathrm{H}}}^1_{\mathrm{A}_1} f\,.$$

Considérons une suite décroissante $\{\mathrm{A}^n_1\}$ d'ouverts contenant A_1 telle qu'on ait, $m_1 \otimes m_2$-*p.p.* (proposition 13 (a)),

$$\overline{\overline{\mathrm{H}}}^1_{\mathrm{A}_1} f = \lim_{n\to\infty} \mathrm{H}^1_{\mathrm{A}^n_1 \cap \mathrm{S}^1} f \quad \text{et} \quad \overline{\overline{\mathrm{H}}}^1_{\mathrm{A}_1} \overline{\overline{\mathrm{H}}}^2_{\mathrm{A}_2} f = \lim_{n\to\infty} \mathrm{H}^1_{\mathrm{A}^n_1 \cap \mathrm{S}^1} \overline{\overline{\mathrm{H}}}^2_{\mathrm{A}_2} f.$$

On peut supposer que le complémentaire de tout sous-ensemble compact de S^1 contient un A^n_1. Soit $\{\mathrm{A}^n_2\}$ une suite d'ouverts contenant A_2 ayant les propriétés correspondantes. On a, sur $\{f < \infty\}$,

$$\lim_{n\to\infty} \mathrm{H}^1_{\mathrm{A}^n_1 \cap \mathrm{S}^1} \mathrm{H}^2_{\mathrm{A}^n_2 \cap \mathrm{S}^2} f = \lim_{n\to\infty} \mathrm{H}^1_{\mathrm{A}^n_1 \cap \mathrm{S}^1} \,(\lim_{k\to\infty} \mathrm{H}^2_{\mathrm{A}^k_2 \cap \mathrm{S}^2} f)\,.$$

Par une méthode analogue à celle qui est utilisée dans la démonstration du théorème 2 pour décomposer la fonction g, on vérifie facilement que, sur $\{f < \infty\}$,

$$\lim_{\alpha\to\infty} \alpha^2 \mathrm{G}^1_\alpha \mathrm{G}^2_\alpha \,(\lim_{k\to\infty} \mathrm{H}^2_{\mathrm{A}^k_2 \cap \mathrm{S}^2} f) = \lim_{k\to\infty} \mathrm{H}^2_{\mathrm{A}^k_2 \cap \mathrm{S}^2} f\,.$$

Or, le membre de gauche est égal à $\overline{\overline{\mathrm{H}}}{}^2_{\mathrm{A}_2} f$. En outre, comme l'ensemble $\{x : f(x, y) < \infty\}$ est absorbant pour chaque y, on a, sur $\{f < \infty\}$,

$$\mathrm{H}^1_{\mathrm{A}_1^n \cap \mathrm{S}^1} \overline{\overline{\mathrm{H}}}{}^2_{\mathrm{A}_2} f = \mathrm{H}^1_{\mathrm{A}_1^n \cap \mathrm{S}^1} \left(\lim_{k \to \infty} \mathrm{H}^2_{\mathrm{A}_2^k \cap \mathrm{S}^2} f \right).$$

Par conséquent, en faisant tendre n vers l'infini, on obtient

$$\overline{\overline{\mathrm{H}}}{}^1_{\mathrm{A}_1} \overline{\overline{\mathrm{H}}}{}^2_{\mathrm{A}_2} f = \lim_{n \to \infty} \mathrm{H}^1_{\mathrm{A}_1^n \cap \mathrm{S}^1} \mathrm{H}^2_{\mathrm{A}_2^n \cap \mathrm{S}^2} f, \ m_1 \otimes m_2\text{-}p.p.$$

Le membre de droite étant invariant par permutation des indices 1 et 2, il résulte que $\overline{\overline{\mathrm{H}}}{}^1_{\mathrm{A}_1} \overline{\overline{\mathrm{H}}}{}^2_{\mathrm{A}_2} f = \overline{\overline{\mathrm{H}}}{}^2_{\mathrm{A}_2} \overline{\overline{\mathrm{H}}}{}^1_{\mathrm{A}_1} f \ m_1 \otimes m_2$-*p.p.*, donc partout.

7. Représentation intégrale des fonctions séparément excessives.

On s'occupera d'abord des fonctions qui sont harmoniques de l'une des variables et potentiels de l'autre.

S^1_u désignera l'ensemble $\mathrm{S}^1_{\mathrm{p}} \cap \mathrm{S}^1_{r_1}$ et $\mathrm{S}^{1'}_u$ l'ensemble des $\xi \in \mathrm{S}^{1'}$ tels qu'il existe une fonction excessive $f \in \mathrm{L}(r_1)$ dont $\overline{\mathrm{H}}{}^1_{\{\xi\}} f$ n'est pas identiquement nulle. Pour tout $\xi \in \mathrm{S}^{1'}_u$, $\kappa_1(\,.\,,\xi)$ est une fonction harmonique non identiquement nulle (proposition 11.3 de [1]). En remplaçant l'indice 1 par 2, on a les notations correspondantes pour le second espace.

Pour simplifier, on utilisera souvent le symbole $\kappa\mu$ pour désigner la fonction $\int \kappa_1(\,.\,,\xi)\,\kappa_2(\,.\,,\eta)\,d\mu(\xi,\eta)$, où μ est une mesure sur $(\mathrm{S}^1 + \mathrm{S}^{1'}) \times (\mathrm{S}^2 + \mathrm{S}^{2'})$.

PROPOSITION 16. – *Si f est une fonction séparément excessive de* $\mathrm{L}(r_1 \otimes r_2)$, *alors f appartient à* $\mathrm{L}_0(m_1 \otimes m_2)$.

En effet, la fonction $\int f(\,.\,,y)\,dr_2(y)$ appartient à $\mathrm{L}(r_1)$. Elle est en outre excessive, donc elle appartient à $\mathrm{L}_0(m_1)$. Par suite, $f(x\,,.) \in \mathrm{L}_0(m_2)$ pour m_1-presque tout x, donc $f \in \mathrm{L}_0(m_1 \otimes m_2)$ (proposition 2).

PROPOSITION 17. – *Supposons que la fonction séparément excessive* $f \in \mathrm{L}(r_1 \otimes r_2)$ *soit un potentiel de la première variable et vérifie la condition* (H). *Si* A_2 *est un sous-ensemble borélien de* $\mathrm{S}^{2'}$, *il existe une mesure finie* μ *sur* $\mathrm{S}^1 \times \mathrm{A}_2$ *telle qu'on ait, pour tout x, y,*

$$\overline{\overline{\mathrm{H}}}{}^2_{\mathrm{A}_2} f(x, y) = \int_{\mathrm{S}^1 \times \mathrm{A}_2} \kappa_1(x, \xi)\, \kappa_2(y, \eta)\, d\mu(\xi, \eta).$$

Montrons d'abord que, A_2 étant un ouvert d'adhérence compacte $\overline{\mathrm{A}}_2$ contenue dans S^2, il existe une mesure μ, portée par $\mathrm{S}^1 \times \overline{\mathrm{A}}_2$, telle qu'on ait $\mathrm{H}^2_{\mathrm{A}_2} f = \mathrm{G}\mu$. Comme f appartient à $\mathcal{H}$ (proposition 16), il existe une suite $\{f_n\}$ croissant vers f et ayant les propriétés figurant dans la proposition 5. En procédant comme dans la seconde partie de la démonstration du théorème 1, on montre, à l'aide de la proposition 7.10 de [1], que $n\mathrm{G}^1_n \mathrm{H}^2_{\mathrm{A}_2} f_n = \mathrm{G}\mu_n$, où μ_n est une mesure portée par l'ensemble $\mathrm{S}^1 \times \overline{\mathrm{A}}_2$. D'après la proposition 4, il existe une limite vague de $\{\mu_n\}$, soit μ, évidemment portée par le même ensemble. Par un raisonnement analogue à celui que l'on a employé au même effet dans la première partie de la démonstration du théorème 1, on prouve que la condition de la proposition 4 (c) est vérifiée. D'après cette proposition, $\mathrm{G}\mu = \lim_{n \to \infty} \mathrm{G}\mu_n = \mathrm{H}^2_{\mathrm{A}_2} f$. La suite de la démonstration refait le chemin indiqué dans la démonstration de la première assertion de la proposition 11.2 dans [1] et ne sera donc pas donnée. Remarquons seulement que les limites des suites de mesures qui interviennent ont été considérées en tant que limites dans la topologie vague de l'espace des mesures sur $\mathrm{S}^1 \times (\mathrm{S}^2 + \mathrm{S}^{2'})$. En outre, pour montrer qu'une fonction de la forme

$$g = \begin{cases} \overline{\overline{\mathrm{H}}}{}^2_{\mathrm{C}_2} f - \overline{\overline{\mathrm{H}}}{}^2_{\mathrm{B}_2} f & \text{sur} \quad \{f < \infty\}, \\ \\ \infty & \text{sur} \quad \{f = \infty\} \end{cases}$$

$$(\mathrm{B}_2, \mathrm{C}_2 \text{ compacts tels que } \mathrm{B}_2 \subset \mathrm{C}_2 \subset \mathrm{S}^{2'}),$$

intervenant vers la fin de la démonstration, est séparément surmédiane, on a procédé de la manière suivante : la proposition 13(b) entraîne immédiatement que g est surmédiane de la seconde variable. D'autre part, si l'on pose $f' = \overline{\overline{\mathrm{H}}}{}^2_{\mathrm{C}_2} f$ on a, d'après la proposition 13 (c),

$$\overline{\overline{\mathrm{H}}}{}^2_{\mathrm{B}_2} f' = \overline{\overline{\mathrm{H}}}{}^2_{\mathrm{B}_2} f.$$

Donc, en choisissant une suite décroissante $\{\mathrm{B}_2^n\}$ d'ouverts contenant B_2 telle que $\overline{\overline{\mathrm{H}}}{}^2_{\mathrm{B}_2} f' = \lim_{n \to \infty} \mathrm{H}^2_{\mathrm{B}_2^n \cap \mathrm{S}^2} f'$ sur $\{f < \infty\}$, on en revient au problème de montrer que la fonction égale à $f' - \mathrm{H}^2_{\mathrm{B}_2^n \cap \mathrm{S}^2} f'$ sur $\{f < \infty\}$ et à ∞ ailleurs est surmédiane de la première variable, ce qui est une conséquence des propositions 13(b), 10 et 9.

PROPOSITION 18. – *Supposons que la fonction séparément excessive* $f \in L(r_1 \otimes r_2)$ *soit un potentiel de la première variable et harmonique de la seconde. Il existe alors une mesure finie* μ *et une seule, sur* $S_u^1 \times S_u^{2'}$, *telle qu'on ait, pour tout* x, y,

$$f(x, y) = \int_{S_u^1 \times S_u^{2'}} \kappa_1(x, \xi)\, \kappa_2(y, \eta)\, d\mu(\xi, \eta).$$

En raison des propositions 11.7 de [1] et 14, on a $\overline{\overline{H}}{}^2_{S^{2'} - S_u^{2'}} f = 0$. D'autre part, comme f est harmonique de la seconde variable, on a évidemment $\overline{\overline{H}}{}^2_{S^{2'}} f = f$. Il en résulte

$$f = \overline{\overline{H}}{}^2_{S^{2'}} f \leqslant \overline{\overline{H}}{}^2_{S_u^{2'}} f + \overline{\overline{H}}{}^2_{S^{2'} - S_u^{2'}} f \leqslant f,$$

donc $f = \overline{\overline{H}}{}^2_{S_u^{2'}} f$. Comme f vérifie (H) (proposition 10), on a $f = \kappa\mu$, où μ est une mesure portée par $S^1 \times S_u^{2'}$ (proposition 17). On peut naturellement admettre que μ est portée par $S_{r_1}^1 \times S_u^{2'}$. Par un raisonnement déjà utilisé dans la démonstration du théorème 1, on montre alors que μ est nécessairement portée par $S_u^1 \times S_u^{2'}$. Supposons que ν soit une autre mesure, portée par le même ensemble, telle que $f = \kappa\nu$. ν coïncide alors avec μ. Voici une esquisse de la démonstration. Soit A_2 un sous-ensemble borélien de $S^{2'}$. Une application des propositions 13 (d) et 14 donne

$$\int \kappa_1(\cdot, \xi)\, \overline{H}{}^2_{A_2}\, \kappa_2(\cdot, \eta)\, d\mu(\xi, \eta) = \int \kappa_1(\cdot, \xi)\, \overline{H}{}^2_{A_2}\, \kappa_2(\cdot, \eta)\, d\nu(\xi, \eta).$$

En intégrant les deux membres par rapport à r_2, on en déduit, compte tenu de la relation (11.7) de [1], l'égalité

$$\int \kappa_1(\cdot, \xi)\, g(\eta)\, d\mu(\xi, \eta) = \int \kappa_1(\cdot, \xi)\, g(\eta)\, d\nu(\xi, \eta),$$

pour toute fonction borélienne $g \geqq 0$. En utilisant cette relation et en suivant la méthode employée dans la première partie de la démonstration de la proposition 7.11 de [1], on montre que $\mu = \nu$ dans le cas où μ et ν sont portées par un ensemble de la forme $K_1 \times S_u^{2'}$, K_1 désignant un compact contenu dans $S_{r_1}^1$. On se libère de cette restriction par un procédé analogue à celui qui a été utilisé dans la seconde partie de la même démonstration. Ici, on se limitera à donner des indications sur la preuve de deux faits auxiliaires. Le premier est que, A_1 étant un ouvert d'adhérence compacte contenue dans S^1, $H_{A_1}^1 f = \kappa\mu_{A_1}$, où μ_{A_1} est une mesure portée par $\overline{A}_1 \times S_u^{2'}$. On le démontre en partant d'une représentation $\kappa\mu$ de f, à l'aide d'un argument déjà utilisé dans la démonstration de la proposition 7. Le deuxième est le suivant : μ étant une mesure sur $(S^1 + S^{1'}) \times (S^2 + S^{2'})$, si $\kappa\mu = 0$, alors

$$\mu((S^1_{r_1} + S^{1'}_u) \times (S^2_{r_2} + S^{2'}_u)) = 0 .$$

Cela est une conséquence de la semi-continuité inférieure de

$$\kappa_1(x\,,.)\,\kappa_2(y\,,.)\,,$$

compte tenu du fait que, si $(\xi\,,\eta) \in (S^1_{r_1} + S^{1'}_u) \times (S^2_{r_2} + S^{2'}_u)$, alors la fonction $\kappa_1(.\,,\xi)\,\kappa_2(.\,,\eta)$ n'est pas identiquement nulle (cf. [1], p. 500).

La proposition suivante remplace la proposition 5 dans la démonstration de l'existence d'une représentation intégrale des fonctions séparément harmoniques.

PROPOSITION 19. – *Soit f une fonction séparément excessive de* $L(r_1 \otimes r_2)$, *harmonique de la seconde variable. Il existe alors une suite $\{f_n\}$ de fonctions séparément excessives croissant vers f telle que, pour chaque n, f_n est harmonique de la seconde variable et $f_n(.\,,y)$ est un potentiel borné pour m_2-presque tout y.*

La démonstration est semblable à celle de la proposition 5. En voici une esquisse. On désigne par Λ l'ensemble des y tels que

$$f(.\,,y) \in L(r_1)\,.$$

En vertu du théorème 4 de [1], pour tout $y \in \Lambda$,

$$f(x\,,y) = \int \kappa_1(x\,,\xi)\,d\mu_y(\xi)\,,$$

où μ_y est une mesure portée par $S^1_u + S^{1'}_u$. On pose $\mu_y = 0$ pour tout $y \in \Lambda^{c(18)}$ et l'on montre que, A_2 étant un ensemble borélien d'adhérence compacte contenue dans S^2, on a, pour tout $y \in \Lambda$,

$$\int H^2_{A_2^c}(y\,,dy')\,\mu_{y'}(.) = \mu_y(.)\,.$$

Cela établi, on considère un potentiel g dans S^1, borné et strictement positif partout (proposition 7.7 de [1]) et l'on pose

$$f'_n(x\,,y) = \int \kappa_1(x\,,\xi) \wedge ng(x)\,d\mu_y(\xi)\,.$$

(18) Λ^c désigne le complémentaire par rapport à S^2.

La suite des régularisées séparément excessives f_n de f'_n a les propriétés requises.

PROPOSITION 20. – *Soit f une fonction séparément harmonique de* $L(r_1 \otimes r_2)$. *Il existe alors une mesure finie μ et une seule, sur* $S_u^{1'} \times S_u^{2'}$, *telle qu'on ait, pour tout x, y,*

$$f(x, y) = \int_{S_u^{1'} \times S_u^{2'}} \kappa_1(x, \xi)\, \kappa_2(y, \eta)\, d\mu(\xi, \eta).$$

En procédant comme dans la démonstration de la proposition 17 et à l'aide des propositions 19 et 15, on montre que, A_1 et A_2 étant deux sous-ensembles boréliens respectivement de $S^{1'}$ et $S^{2'}$, il existe une mesure μ, portée par $A_1 \times A_2$, telle que $\overline{\overline{H}}{}^1_{A_1}\, \overline{\overline{H}}{}^2_{A_2} f = \kappa\mu$. D'autre part, $f = \overline{\overline{H}}{}^1_{S_u^{1'}} f = \overline{\overline{H}}{}^2_{S_u^{2'}} f$, donc $f = \overline{\overline{H}}{}^1_{S_u^{1'}}\, \overline{\overline{H}}{}^2_{S_u^{2'}} f = \kappa\mu$, où μ est portée par $S_u^{1'} \times S_u^{2'}$. La mesure μ est unique : en effet, si A_1 et A_2 sont définis comme ci-dessus, on a, en vertu de la relation 11.7 de [1] et des propositions 13 (d) et 14,

$$\int \overline{\overline{H}}{}^1_{A_1}\, \overline{\overline{H}}{}^2_{A_2} f\, dr_1 \otimes dr_2$$

$$= \int_{S_u^{1'} \times S_u^{2'}} d\mu(\xi, \eta) \left(\int \overline{H}{}^1_{A_1} \kappa_1(x, \xi)\, dr_1(x) \int \overline{H}{}^2_{A_2} \kappa_2(y, \eta)\, dr_2(y) \right)$$

$$= \mu(A_1 \times A_2),$$

pour toute mesure μ donnant lieu à la représentation intégrale de l'énoncé, ce qui achève la démonstration.

Le théorème 3, les propositions 18 et 20 entraînent le

THEOREME 4. – *Soit f une fonction séparément excessive de* $L(r_1 \otimes r_2)$ *vérifiant* (H). *Il existe alors une mesure finie μ et une seule, sur* $(S_u^1 + S_u^{1'}) \times (S_u^2 + S_u^{2'})$, *telle qu'on ait, pour tout x, y,*

$$f(x, y) = \int_{(S_u^1 + S_u^{1'}) \times (S_u^2 + S_u^{2'})} \kappa_1(x, \xi)\, \kappa_2(y, \eta)\, d\mu(\xi, \eta).$$

Réciproquement, μ étant une mesure finie sur $(S^1 + S^{1'}) \times (S^2 + S^{2'})$, *la fonction f, définie par*

$$f(x, y) = \int \kappa_1(x, \xi)\, \kappa_2(y, \eta)\, d\mu(\xi, \eta),$$

est séparément excessive, appartient à $L(r_1 \otimes r_2)$ *et vérifie* (H).

8. Appendice.

L'une des hypothèses nécessaires au développement de la théorie de Kunita et Watanabe est l'hypothèse de continuité absolue (cf. hypothèse (B) du paragraphe 2 et [6], p. 159). Dans l'opération "produit de deux processus", cette hypothèse, en général, n'est pas permanente, même si les résolvantes des deux processus sont fortement fellériennes. Un contre-exemple est fourni par le produit de deux copies du processus de translation uniforme sur la droite réelle. On peut montrer cependant (cf. [7]) que, si le semi-groupe de l'un des deux processus et la résolvante de l'autre sont fortement fellériens, le processus produit satisfait alors à l'hypothèse de continuité absolue.

BIBLIOGRAPHIE

[1] H. KUNITA et T. WATANABE, Markov processes and Martin boundaries, Part I, *Ill. J. of Math.*, vol. 9, (1965), p. 485-526.

[2] G.A. HUNT, Markov processes and potentials, III, *Ill. J. of Math.*, vol. 2, (1958), p. 151-213.

[3] R.S. MARTIN, Minimal positive harmonic functions, *Trans. Amer. Math. Soc.*, vol. 49, (1941), p. 137-172.

[4] R. CAIROLI, Produits de semi-groupes de transition et produits de processus, *Publ. Inst. Stat. Univ. Paris,* vol. 15, (1966), p. 311-384.

[5] K. GOWRISANKARAN, Multiply harmonic functions, *Nagoya Math., J.*, vol. 28, (1966), p. 27-48.

[6] P.A. MEYER, Processus de Markov, Lecture Notes in Mathematics, 26, Springer-Verlag, Berlin, (1967).

[7] R. CAIROLI, Semi-groupes de transition et fonctions excessives, Séminaire de probabilités I, Lecture Notes in Mathematics, 39, Springer-Verlag, Berlin, (1967), p. 18-33.

Manuscrit reçu le 22 août 1967.

R. CAIROLI
Institut Battelle, 7 route de Drize
Carouge - Genève (Suisse)