ANNALES DE L'INSTITUT FOURIER

GUSTAVE CHOQUET

Sur un théorème de Keldych concernant le problème de Dirichlet

Annales de l'institut Fourier, tome 18, nº 1 (1968), p. 309-315

<http://www.numdam.org/item?id=AIF_1968__18_1_309_0>

Ann. Inst. Fourier, Grenoble
18, 1 (1968), 309-316

SUR UN THÉORÈME DE KELDYCH CONCERNANT LE PROBLÈME DE DIRICHLET

par Gustave CHOQUET

Le théorème suivant est dû à Keldych (voir [4] et [5]) :

THEOREME 1. – *Si* Ω *est un domaine borné de* $\mathbf{R}^n$, *de frontière* A, *il existe un ensemble dénombrable* D *de points irréguliers de* A *ayant la propriété suivante :*

Pour toute donnée continue f *sur* A, *si le "prolongement harmonique"* $\hat{f}$ *de* f *(défini par la solution* H_f *de Perron-Wiener) est continu en tout point de* D, *il est continu en tout point de* A.

La démonstration de Keldych n'est pas simple. Depuis, Brelot (voir [2]) en a donné une démonstration fort courte, basée sur un théorème de Banach ; toutefois sa démonstration, purement existentielle, ne montre pas comment il faut choisir les points x_n de D.

Nous donnerons ici trois nouvelles démonstrations du théorème 1. Les deux premières ne nécessitent presque aucune connaissance de la théorie du potentiel et s'appliquent à un cadre fort général ; elles sont d'ailleurs équivalentes, mais la seconde met en évidence, plus encore que la première, le fait que D doit être assez riche pour représenter tous les types possibles d'irrégularité.

La troisième est plus compliquée, mais elle fournit un énoncé plus précis que le théorème 1, et s'appuie sur un résultat intéressant qui ne semble pas avoir été remarqué, d'où résulte aussi que si l'on désigne temporairement par $g^*(x)$ la limite fine éventuelle, en un point irrégulier x, d'une fonction harmonique g dans Ω, et si X désigne un ensemble de points-frontière irréguliers de Ω, la continuité de G^* (où G est la fonction de Green de pôle x_0) sur X entraîne celle de $(\hat{f})^*$, pour toute $f \in \mathcal{C}(\mathrm{A})$.

Cadre général des deux premières démonstrations. – Soient B un espace topologique séparé, A une partie compacte non dense de B, et $\Omega = B \dot{-} A$. On se donne une application linéaire positive : $f \longrightarrow \hat{f}$ de $\mathcal{C}(A)$ dans $\mathcal{C}(\Omega)$ telle que $\hat{1}$ soit bornée. On dira que f est *régulière* au point $a \in A$ si $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x \in \Omega}} \hat{f}(x)$ existe et vaut $f(a)$.

LEMME 2. – *Avec ces notations, si* A *est métrisable, il existe une partie dénombrable* D *de* A *telle que, pour tout* $f \in \mathcal{C}(A)$ *on ait l'implication* :
(f *régulière en tout point de* D) $\Longrightarrow$ (f *régulière en tout point de* A).

Admettons pour un instant ce lemme. Le théorème 1 en résulte, en prenant pour le B du lemme 2, la fermeture dans $\mathbf{R}^n$ du domaine Ω du théorème 1, et en prenant A = (la fermeture de l'ensemble des points réguliers de Ω^*).

Si l'ensemble D contient des points réguliers de la frontière de Ω, on peut les ôter de D puisque toute $f \in \mathcal{C}(A)$ est régulière en tout point régulier.

Première démonstration du lemme 2. Posons $k = \sup\limits_{x \in \Omega} \hat{1}(x)$, et notons M l'espace compact des mesures positives sur A, de masse totale $\leqslant k$. A tout $x \in \Omega$ est associé sa mesure "harmonique" $\mu_x \in M$ définie par $\mu_x(f) = \hat{f}(x)$.

Dans B x M, soit X l'ensemble des couples (x, μ_x), où $x \in \Omega$. L'ensemble $Y = \overline{X} \cap (A \times M)$ est compact et métrisable, puisque A et M le sont ; donc Y contient une partie dénombrable Δ, partout dense dans Y. Montrons que la projection D de Δ sur A a la propriété cherchée :

Soit $f \in \mathcal{C}(A)$ et soit $x \in A$; les valeurs d'adhérence de $\hat{f}$ en x ne sont autres que les limites de $\hat{f}(y)$ ou $\mu_y(f)$ pour y tendant vers x dans Ω suivant un ultrafiltre $\mathcal{U}$; or les limites des μ_y suivant ces ultrafiltres sont les μ telles que $(x, \mu) \in Y$. Donc dire que f est régulière en x équivaut à dire que $f(x) = \mu(f)$ pour tout $(x, \mu) \in Y$.

Supposons maintenant f régulière en tout point de D, et soit $a \in A$. Tout $(a, \mu) \in Y$ est limite d'une suite (a_n, μ_n) de points de Δ, donc $\mu(f) = \lim \mu_n(f) = \lim f(a_n)$, c'est-à-dire $f(a)$ puisque f est continue. D'où la régularité de f en a.

Deuxième démonstration du lemme 2. Nous utiliserons la notion suivante :

DEFINITION 3. – *Pour toute fonction numérique φ sur un espace topologique* E, *on appellera* piquetage *de φ toute partie partout dense* P *de* E *telle que, pour tout $a \in$ E, $\varphi(a)$ soit une valeur d'adhérence en a de la restriction de φ à* P.

Dire que P est un piquetage de φ équivaut visiblement à dire que P est la projection sur E d'une partie partout dense du graphe de φ dans E x R. Si donc E a une base dénombrable d'ouverts, φ admet un piquetage dénombrable.

Revenons alors au lemme 2. Pour toute $f \in \mathcal{C}(A)$, soit $\omega_f(x)$ l'oscillation de $\hat{f}$ dans B au point x de A ; on peut dire, de façon imagée, que $\omega_f(x)$ est la mesure, par la fonction f, de l'irrégularité de x.

Soit maintenant $\{f_n \; ; \; n \in \mathbf{N}\}$ une partie dénombrable partout dense de $\mathcal{C}(A)$, et pour tout n soit P_n un piquetage dénombrable de ω_{f_n}. On va montrer que l'ensemble $P = \cup P_n$ est l'ensemble D annoncé dans le lemme 2 :

Il suffit pour le voir de montrer que P est un piquetage de ω_f pour chaque $f \in \mathcal{C}(A)$; en effet si alors f est régulière en tout point de P, comme ω_f est nul sur P, ω_f est aussi partout nul sur A.

Or, d'une part P est un piquetage de chaque ω_{f_n} ; d'autre part, si $g \in \mathcal{C}(A)$, g est limite uniforme d'une sous-suite (g_n) de la suite (f_n) ; donc ω_g est limite uniforme des ω_{g_n}, ce qui entraîne que P est bien aussi un piquetage de ω_g.

Troisième démonstration du théorème 1. Soit Ω un domaine borné de $\mathbf{R}^n$, de frontière Ω^*. On sait (voir Brelot 2) que pour tout $f \in \mathcal{C}(\Omega^*)$, son prolongement harmonique $\hat{f}$ dans Ω a en tout point $x \in \overline{\Omega}$ une limite fine, que nous noterons encore $\hat{f}(x)$; et d'après Keldych ou Frostman (voir [3], [4]), toute valeur d'adhérence de $\hat{f}$ en un point $x \in \overline{\Omega}$ est comprise dans l'intervalle $[f(x), \hat{f}(x)]$ (un point frontière x étant dit régulier si $f(x) = \hat{f}(x)$ pour toute $f \in \mathcal{C}(\Omega^*)$).

Interprétons ce résultat en termes de mesures harmoniques : Pour tout $x \in \overline{\Omega}$, notons μ_x la mesure de Radon positive sur Ω^* définie par $\mu_x(f) = \hat{f}(x)$; le résultat précédent peut alors s'énoncer :

PROPRIETE 4. – *Pour tout* $a \in \bar{\Omega}$, *toute valeur d'adhérence en a, de l'application* $x \longrightarrow \mu_x$ *de* $\bar{\Omega}$ *dans l'espace compact* $\mathfrak{M}^1(\Omega^*)$ *des mesures positives de masse* 1, *est une mesure* $\mu \in [\mu_a, \varepsilon_a]$, *autrement dit de la forme* $\mu = \alpha\mu_a + (1-\alpha)\varepsilon_a$, *où* $0 \leqslant \alpha \leqslant 1$.

C'est cet énoncé que nous allons utiliser.

LEMME 5. – *Soit* Ω *un ouvert borné de* $\mathbf{R}^n$; *soient* $f, g \in \mathcal{C}(\Omega^*)$ *et* $\hat{f}$, $\hat{g}$ *leurs prolongements harmoniques fins à* $\bar{\Omega}$; *soient* $X \subset \bar{\Omega}$, $a \in \Omega^*$, *et soit* ε *un nombre* > 0.

Si $|\hat{g}| \geqslant \varepsilon$ *sur* X et si $f(a) = g(a) = 0$, *le quotient* $\hat{f}_X/\hat{g}$(1) *est continu au point a.*

Démonstration. – Soit $\mathcal{U}$ un ultrafiltre quelconque sur X, qui converge vers a. D'après la propriété 4, les μ_x convergent vaguement suivant $\mathcal{U}$ vers une mesure μ de la forme $\alpha\mu_a + (1-\alpha)\varepsilon_a$ (où $0 \leqslant \alpha \leqslant 1$).

Or sur X on a

$$|\mu_x(g)| = |\hat{g}(x)| \geqslant \varepsilon, \text{ d'où}$$

$$\alpha|\mu_a(g)| = \alpha|\mu(g)| \geqslant \varepsilon, \text{ d'où } \alpha > 0 \text{ ; on a donc}$$

$$\lim_{\mathcal{U}} (\hat{f}(x)/\hat{g}(x)) = \lim_{\mathcal{U}} (\mu_x(f)/\mu_x(g)) = \mu(f)/\mu(g)$$

$$= \mu_a(f)/\mu_a(g) = \hat{f}(a)/\hat{g}(a)\,.$$

ce qui démontre la continuité annoncée.

COROLLAIRE 6. – *Avec les hypothèses du lemme* 5, *si* $\hat{g}_X$ *est continue en a,* $\hat{f}_X$ *l'est aussi.*

LEMME 7. – *Les conclusions des énoncés* 5 *et* 6 *restent valables si on remplace la fonction* $\hat{g}$ *par le prolongement fin* $\hat{G}$ *de la fonction de Green* $G(x_0, x)$ *de pôle* x_0, *la condition* $f(a) = g(a) = 0$ *étant remplacée simplement par* $f(a) = 0$.

Démonstration. – Désignons par ω le domaine $(\Omega \dot{-} B)$, où $B = \{x \in \Omega\ ;\ G(x_0, x) \geqslant k\}$, où k est assez grand pour que B soit compacte et ne contienne pas a. Alors ω^* se compose des compacts disjoints Ω^* et B^*.

(1) On note h_X la restriction d'une fonction h à X.

Définissons les fonctions $f', g' \in \mathcal{C}(\omega^*)$:

f' est égale à f sur Ω^*, à $\hat{f}$ sur B^*

g' est égale à 0 sur Ω^*, à G sur B^* .

Dans ω, donc aussi sur $X \cap \omega$, on a $\hat{f'} = \hat{f}$ et $\hat{g'} = \hat{G}$; donc le lemme 7 n'est qu'un cas particulier du lemme 5, relatif aux données ω, f', g'.

THEOREME 8. – *(avec les notations des lemmes 5 et 7). Si sur une partie* X *de* $\overline{\Omega}$ *la fonction* $\hat{G}_X$ *est continue, il en est de même de* $\hat{f}_X$, *pour toute* $f \in \mathcal{C}(\Omega^*)$.

Démonstration. – La continuité de $\hat{f}_x$ étant assurée dans Ω et en tout point x régulier (ce qui se traduit par $\hat{G}(x) = 0$), démontrons-la en tout point frontière $a \in X$ pour lequel $\hat{G}(a) > 0$: le lemme 7 démontre alors la continuité de $\hat{f}_x$ en a lorsque $f(a) = 0$. Mais cette continuité est encore vraie lorsque f est la fonction constante $f(a)$; la relation $f = (f - f(a)) + f(a)$, qui entraîne $\hat{f} = \widehat{f - f(a)} + f(a)$, démontre donc la continuité dans le cas général.

Remarque 9. – Ce théorème 8 peut encore s'exprimer ainsi :

$$(\hat{G}_x \text{ continue}) \Longrightarrow (\text{L'application } x \longrightarrow \mu_x \text{ de } X \text{ dans } \mathfrak{M}^1(\Omega^*) \text{ est continue}).$$

Introduisons maintenant une terminologie commode :

DEFINITION 10. – *Soit* I *l'ensemble des points - frontière irréguliers de* Ω *ayant dans* Ω^* *un voisinage non polaire. Et soit* D *une partie de* I.

a) *On dit que* D *est régularisante si pour toute* $f \in \mathcal{C}(\Omega^*)$, *la continuité de* $\hat{f}$ *en tout point de* D *entraîne la continuité de* f *dans* $\overline{\Omega}$.

b) *On dit que* D *est un piquetage faible de* $\hat{G}_I$ *si* D *est partout dense dans* I *et si pour tout* $a \in I$, *on a* $\limsup_{\substack{x \in D \\ x \to a}} \hat{G}(x) = 0$.

Voici alors un énoncé qui précise le théorème 1.

THEOREME 11. – 1) *Tout* $D \subset I$ *qui est un piquetage faible de* $\hat{G}_I$ *est régularisant.*

2) I *contient des parties dénombrables régularisantes.*

Démonstration. — 1) Soit $D \subset I$ un piquetage faible de $\hat{G}_I$. Soit $a \in I$; compte tenu de l'hypothèse et du fait que $\hat{G}(a) > 0$, a est limite d'une suite (x_n) de points de D telle que sur $X = \{a, x_1, \ldots, x_n, \ldots\}$ on ait $\hat{G}_I \geqslant \varepsilon$ (où $\varepsilon > 0$).

Soit alors $f \in \mathcal{C}(\Omega^*)$ telle que $\hat{f}(x) = f(x)$ pour tout $x \in D$; si l'on pose $g = f - f(a)$, on a donc aussi $\hat{g}(x) = g(x)$ pour tout $x \in D$, et de plus $g(a) = 0$, d'où $\lim \hat{g}(x_n) = \lim g(x_n) = 0$.

Or le lemme 7 montre que $\hat{g}_X / \hat{G}_X$ est continue en a, donc comme $\hat{G}_X \geqslant \varepsilon$, on a $\hat{g}(a) = \lim \hat{g}(x_n) = 0$, d'où $\hat{g}(a) = g(a)$, donc aussi $\hat{f}(a) = f(a)$.

Cette égalité étant vraie pour tout $a \in I$, D est régularisant.

2) Puisque $\hat{G}_I$ admet des piquetages dénombrables et que tout piquetage de $\hat{G}_I$ est aussi un piquetage faible, il résulte de (1) que I contient des parties dénombrables régularisantes.

PROBLEME 12. — *Est-ce que toute partie régularisante* D *de* I *est un piquetage faible de* $\hat{G}_I$?

Remarque 13. — Nous avons constamment supposé que Ω est un domaine borné ; cette restriction est inutile, mais plus généralement, il est clair que les énoncés de ce travail s'étendent à toute axiomatique raisonnable du problème de Dirichlet, telle que celle de M. Brelot.

BIBLIOGRAPHIE

[1] M. BRELOT, Le problème de Dirichlet ramifié, *Ann. Un. Grenoble*, t. 22, (1946).

[2] M. BRELOT, Eléments de la théorie classique du potentiel, 3ème édition, p. 106, au C.D.U.

[3] FROSTMAN, *Kungl. Fisiogr. Sällsk. Lund.* Förd., t. 9, N° 2.

[4] KELDYCH, *C.R. Ac. Sc.* URSS, (1938), vol. 18, N° 6.

[5] KELDYCH, Sur la résolubilité et la stabilité du problème de Dirichlet (en russe). *Usp. Mat. Nauk* 88, 1941.

Manuscrit reçu le 24 janvier 1968.

Gustave CHOQUET,
Institut H. Poincaré,
11, Rue P. Curie
Paris 5e