

# ANNALES DE L'INSTITUT FOURIER

JEAN-PIERRE SERRE

## **Prolongement de faisceaux analytiques cohérents**

*Annales de l'institut Fourier*, tome 16, n° 1 (1966), p. 363-374

[http://www.numdam.org/item?id=AIF\\_1966\\_\\_16\\_1\\_363\\_0](http://www.numdam.org/item?id=AIF_1966__16_1_363_0)

© Annales de l'institut Fourier, 1966, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales de l'institut Fourier » (<http://annalif.ujf-grenoble.fr/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/legal.php>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

## PROLONGEMENT DE FAISCEAUX ANALYTIQUES COHÉRENTS

par JEAN-PIERRE SERRE

On rencontre fréquemment en théorie des fonctions automorphes des variétés algébriques complexes de la forme  $X - S$ , où  $X$  est projective, et où  $S$  est une sous-variété de  $X$  de codimension  $\geq 2$ . Si  $\mathcal{F}$  est un faisceau analytique cohérent sur  $X - S$  (par exemple un faisceau de formes automorphes), on peut essayer de le prolonger en un faisceau analytique cohérent  $\mathcal{G}$  sur  $X$ ; du fait que  $X$  est projective,  $\mathcal{G}$  est alors *algébrique*, et l'on peut lui appliquer les résultats de [13].

Dans ce qui suit, je donne un *critère de prolongement* permettant d'affirmer l'existence (sous certaines conditions) d'un tel faisceau  $\mathcal{G}$ . Les conditions en question sont vérifiées dans le cas des faisceaux de formes automorphes, cf. [1], 10.14.

L'énoncé du critère est donné au n° 1; il s'applique à des espaces analytiques normaux quelconques. Sa démonstration utilise de façon essentielle le théorème de Remmert-Stein [11] sur le prolongement des sous-variétés; on la trouvera au n° 4. Les n°s 2 et 3 sont préliminaires. Les n°s 5 et 6 donnent divers compléments, notamment sur le cas algébrique.

### 1. Le critère de prolongement.

Soit  $X$  un espace analytique complexe (cf. [5]), de faisceau structural  $\mathcal{O}_X$ , et soit  $S$  un sous-ensemble analytique fermé de  $X$ . Notons  $i$  l'injection  $X - S \rightarrow X$ . Soit  $\mathcal{F}$  un faisceau analytique cohérent sur  $X - S$ , et soit  $i_* \mathcal{F}$  son *image directe* par  $i$ ; rappelons que, si  $U$  est un ouvert de

$X$ , l'espace vectoriel  $\Gamma(U, i_* \mathcal{F})$  des sections de  $i_* \mathcal{F}$  sur  $U$  est égal, par définition, à  $\Gamma(U - S \cap U, \mathcal{F})$ . Le faisceau  $i_* \mathcal{F}$  est un faisceau analytique sur  $X$ , prolongeant  $\mathcal{F}$ . Considérons les deux conditions suivantes :

(i) *Le faisceau  $i_* \mathcal{F}$  est cohérent.*

(ii) *Il existe un faisceau analytique cohérent  $\mathcal{G}$  sur  $X$  qui prolonge  $\mathcal{F}$ .*

Il est clair que (i)  $\implies$  (ii). La réciproque est inexacte en général (le faisceau  $i_* \mathcal{O}_{X-S}$  n'est pas toujours cohérent).

La condition (ii) entraîne :

(iii) *Pour tout  $s \in S$ , il existe une partie ouverte  $U$  de  $X$ , contenant  $s$ , telle que la restriction de  $\mathcal{F}$  à  $U - S \cap U$  soit engendrée par ses sections (i.e., pour tout  $x \in U - S \cap U$ , l'image de  $\Gamma(U - S \cap U, \mathcal{F})$  dans  $\mathcal{F}_x$  engendre le  $\mathcal{O}_x$ -module  $\mathcal{F}_x$ ).*

En effet, si  $\mathcal{G}$  est un faisceau cohérent prolongeant  $\mathcal{F}$ , il suffit de prendre pour  $U$  un voisinage de  $s$  assez petit pour que  $\mathcal{G}$  soit engendré par ses sections sur  $U$ ; il en est *a fortiori* de même pour  $\mathcal{F}$  sur  $U - S \cap U$ .

**THÉORÈME 1.** — *Supposons que  $X$  soit normal, que  $S$  soit partout de codimension  $\geq 2$ , et que  $\mathcal{F}$  soit sans torsion. Les conditions (i), (ii) et (iii) sont alors équivalentes.*

(Rappelons qu'un espace analytique  $X$  est dit *normal* si ses anneaux locaux sont intègres et intégralement clos; un faisceau analytique  $\mathcal{F}$  sur un ouvert  $V$  de  $X$  est dit *sans torsion* si, pour tout  $x \in V$ , le  $\mathcal{O}_x$ -module  $\mathcal{F}_x$  est sans torsion.)

Nous venons de voir que (i)  $\implies$  (ii)  $\implies$  (iii). L'implication (iii)  $\implies$  (i) sera démontrée au n° 4.

## 2. Une propriété noethérienne des faisceaux analytiques cohérents.

**PROPOSITION 1.** — *Soit  $X$  un espace analytique complexe. Tout faisceau analytique cohérent  $\mathcal{A}$  sur  $X$  jouit de la propriété suivante :*

(N) — *Toute famille filtrante croissante  $(\mathcal{A}_i)_{i \in I}$  de sous-faisceaux cohérents de  $\mathcal{A}$  est localement stationnaire (i.e. stationnaire sur tout compact).*

La question étant locale, on peut supposer  $X$  de dimension bornée, et raisonner par récurrence sur  $n = \dim X$ . Le cas  $n < 0$  est trivial,  $X$  étant vide. Supposons  $n \geq 0$ , et soit  $x \in X$ . On sait qu'il existe un voi-

sinage ouvert  $X'$  de  $X$  qui est un « revêtement » d'un ouvert  $Y'$  de  $\mathbb{C}^n$ , i.e. qui possède un morphisme fini  $\pi : X' \rightarrow Y'$  (cf. [5], exposé 19). L'image directe  $\pi_* \mathcal{A}$  de  $\mathcal{A}$  par  $\pi$  est un faisceau cohérent sur  $Y'$ ; de plus, si  $\pi_* \mathcal{A}_i = \pi_* \mathcal{A}_j$ , on a  $\mathcal{A}_i = \mathcal{A}_j$  (*loc. cit.*); il suffit donc de prouver que  $\pi_* \mathcal{A}$  jouit de la propriété (N). Nous sommes ainsi ramenés au cas où  $X$  est une variété non singulière, que l'on peut en outre supposer connexe. D'autre part, tout quotient et toute extension de faisceaux vérifiant (N) vérifie aussi (N). Comme  $\mathcal{A}$  est localement isomorphe à un quotient d'un faisceau  $\mathcal{O}_X^m$ , on voit que l'on est ramené à prouver que le faisceau  $\mathcal{O}_X$  vérifie (N). Dans ce cas, les  $\mathcal{A}_i$  sont des faisceaux d'idéaux. S'ils sont tous nuls, il n'y a rien à démontrer; si  $\mathcal{A}_j \neq 0$  pour un indice  $j \in I$ , le faisceau  $\mathcal{A}_j$  définit un sous-espace analytique  $X_j$  de  $X$ , distinct de  $X$ , donc de dimension  $\leq n - 1$ ,  $X$  étant connexe; les  $\mathcal{A}_i$  ( $i \geq j$ ) correspondent à des faisceaux d'idéaux sur  $X_j$ ; l'hypothèse de récurrence montre alors bien que les  $\mathcal{A}_i$  sont localement stationnaires.

*Remarques.*

1) Ce résultat montre en particulier que la réunion des  $\mathcal{A}_i$  est un faisceau cohérent.

2) On aurait pu déduire la prop. 1 du théorème des « voisinages privilégiés », soit sous la forme de Cartan ([3], th.  $\alpha$ , p. 191), soit sous celle de Douady ([6], § 7).

**PROPOSITION 2.** — *Soient  $X$  un espace analytique complexe,  $\mathcal{A}$  un faisceau analytique cohérent sur  $X$ , et  $(f_i)_{i \in I}$  une famille de sections de  $\mathcal{A}$  sur  $X$ . Le sous-faisceau  $\mathcal{A}_I$  de  $\mathcal{A}$  engendré par les  $f_i$  est cohérent.*

Si  $J$  est une partie finie de  $I$ , le faisceau  $\mathcal{A}_J$  engendré par les  $(f_i)_{i \in J}$ , est cohérent (c'est l'image d'un morphisme  $(\mathcal{O}_X)^J \rightarrow \mathcal{A}$  de faisceaux cohérents). D'après la remarque 1) ci-dessus, la réunion des  $\mathcal{A}_J$  est donc aussi un faisceau cohérent, d'où la proposition.

*Remarque.* Les propositions 1 et 2 ne s'étendent pas aux espaces analytiques sur un corps valué complet ultramétrique.

**3. Faisceaux de cohomologie locale.**

Ces faisceaux ont été introduits par Grothendieck ([8], [9]). Rappelons leur définition :

Soit  $S$  une partie fermée d'un espace topologique  $X$ , et soit  $i$  l'inclusion  $X - S \rightarrow X$ . Soit  $\mathcal{A}$  un faisceau de groupes abéliens sur  $X$ . Pour tout ouvert  $V$  de  $X$ , notons  $H_S^0(V, \mathcal{A})$  le groupe des sections de  $\mathcal{A}$  sur  $V$  à support contenu dans  $S$ ; lorsque  $V$  varie, les  $H_S^0(V, \mathcal{A})$  forment un faisceau, noté  $\mathcal{H}_{X/S}^0(\mathcal{A})$ , ou simplement  $\mathcal{H}_S^0(\mathcal{A})$ ; ce faisceau est concentré sur  $S$ . Les foncteurs dérivés du foncteur  $\mathcal{A} \mapsto H_S^0(V, \mathcal{A})$  sont notés  $H_S^q(V, \mathcal{A})$ ; ce sont des groupes abéliens. Lorsque  $V$  varie, les  $H_S^q(V, \mathcal{A})$  forment un préfaisceau; le faisceau associé est noté  $\mathcal{H}_{X/S}^q(\mathcal{A})$ , ou simplement  $\mathcal{H}_S^q \mathcal{A}$ ; les  $\mathcal{H}_S^q$  sont isomorphes aux foncteurs dérivés du foncteur  $\mathcal{A} \mapsto \mathcal{H}_S^0 \mathcal{A}$ .

Les  $\mathcal{H}_S^q$  relient la cohomologie de  $X$  et de  $X - S$ : pour tout ouvert  $V$  de  $X$ , on a une suite exacte :

$$0 \rightarrow H_S^0(V, \mathcal{A}) \rightarrow H^0(V, \mathcal{A}) \rightarrow H^0(V - S \cap V, \mathcal{A}) \rightarrow H_S^1(V, \mathcal{A}) \rightarrow \dots \quad (*)$$

Par passage à la limite sur  $V$ , on en déduit une suite exacte :

$$0 \rightarrow \mathcal{H}_S^0 \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A} \rightarrow i_* i^* \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{H}_S^1 \mathcal{A} \rightarrow 0, \quad (**)$$

ainsi que des isomorphismes :

$$(R^q i_*) (i^* \mathcal{A}) \simeq \mathcal{H}_S^{q+1} \mathcal{A} \quad (q \geq 1), \quad (***)$$

où  $i^* \mathcal{A}$  désigne la restriction de  $\mathcal{A}$  à  $X - S$  et  $R^q i_*$  le  $q$ -ème foncteur dérivé du foncteur  $i_*$ .

Supposons maintenant que  $X$  soit un espace analytique,  $S$  un sous-ensemble analytique de  $X$ , et  $\mathcal{A}$  un faisceau analytique cohérent. Les faisceaux  $\mathcal{H}_S^q \mathcal{A}$  sont alors des faisceaux analytiques sur  $X$ ; il serait inintéressant d'en donner des critères de cohérence, analogues à ceux obtenus par Grothendieck dans le cas algébrique (cf. [9], Cor. VIII-II-3). Nous n'aurons besoin que des deux propositions ci-dessous, de nature très élémentaire :

**PROPOSITION 3.** — *Quels que soient  $X$ ,  $S$  et  $\mathcal{A}$ , le faisceau  $\mathcal{H}_S^0 \mathcal{A}$  est cohérent.*

Soit  $\mathcal{J}$  un faisceau cohérent d'idéaux définissant  $S$ , et soit  $\mathcal{A}(\mathcal{J})$  le sous-faisceau de  $\mathcal{A}$  annulé par  $\mathcal{J}$ , autrement dit le noyau de l'homomorphisme canonique  $\mathcal{A} \rightarrow \mathcal{H} \circ \pi(\mathcal{J}, \mathcal{A})$ . C'est un faisceau cohérent. Si l'on remplace  $\mathcal{J}$  par ses puissances  $\mathcal{J}^n$  ( $n \geq 1$ ), on obtient une suite croissante  $\mathcal{A}(\mathcal{J}^n)_{n \geq 1}$  de sous-faisceaux cohérents de  $\mathcal{A}$ . D'après la prop. 1, cette suite est localement stationnaire, et sa réunion  $\mathcal{A}(\mathcal{J}^\infty)$  est un sous-faisceau cohérent de  $\mathcal{A}$ ; la prop. 3 résulte donc du lemme suivant :

LEMME 1. — On a  $\mathcal{H}_S^0 \mathcal{A} = \mathcal{A}(\mathcal{J}^\infty)$ .

Il est clair que  $\mathcal{A}(\mathcal{J}^\infty)$  est nul en dehors de S, ce qui montre qu'il est contenu dans  $\mathcal{H}_S^0 \mathcal{A}$ . Réciproquement, soit  $a$  une section de  $\mathcal{H}_S^0 \mathcal{A}$ , autrement dit une section de  $\mathcal{A}$  à support dans S. Soit  $\mathcal{J}$  l'annulateur de  $a$  dans  $\mathcal{O}_X$ ; c'est un faisceau cohérent d'idéaux de  $\mathcal{O}_X$ , et le support de  $\mathcal{O}_X/\mathcal{J}$  est contenu dans S. D'après le théorème des zéros,  $\mathcal{J}$  contient (localement) une puissance de  $\mathcal{J}$ ; cela montre bien que  $a$  est une section de  $\mathcal{A}(\mathcal{J}^\infty)$ , d'où le lemme.

PROPOSITION 4. — Supposons que X soit normal et que S soit partout de codimension  $\geq 2$ . On a alors  $\mathcal{H}_S^q \mathcal{O}_X = \mathcal{H}_S^1 \mathcal{O}_X = 0$ , et  $i_* \mathcal{O}_{X-S} = \mathcal{O}_X$ .

Soit V un ouvert de X. D'après un résultat classique («Riemannsches Hebbarkeitssatz», cf. par exemple [12]), toute fonction holomorphe sur  $V - S \cap V$  se prolonge de façon unique en une fonction holomorphe sur V. L'application canonique

$$\mathcal{O}_X \rightarrow i_* \mathcal{O}_{X-S}$$

est donc un isomorphisme, et la suite exacte (\*\*\*) montre que l'on a  $\mathcal{H}_S^q \mathcal{O}_X = 0$  pour  $q = 0, 1$ .

Remarques.

1) On trouvera dans le mémoire de Scheja cité plus haut des critères permettant d'affirmer que les faisceaux  $\mathcal{H}_S^q \mathcal{A}$  sont nuls jusqu'à une dimension donnée.

2) Les hypothèses étant celles de la prop. 4, soit  $\mathcal{R}$  un faisceau réflexif sur X (i.e. tel que l'application canonique de  $\mathcal{R}$  dans son bidual soit un isomorphisme). On a alors  $\mathcal{H}_S^0 \mathcal{R} = \mathcal{H}_S^1 \mathcal{R} = 0$  et  $\mathcal{R} = i_* i^* \mathcal{R}$ . En effet, il suffit de prouver la dernière égalité. Or, si l'on note  $\mathcal{D}$  le dual de  $\mathcal{R}$ , on a  $\mathcal{R} = \mathcal{H}om(\mathcal{D}, \mathcal{O}_X)$ , d'où  $i^* \mathcal{R} = \mathcal{H}om(i^* \mathcal{D}, \mathcal{O}_{X-S})$ , et

$$\begin{aligned} i_* i^* \mathcal{R} &= i_* \mathcal{H}om(i^* \mathcal{D}, \mathcal{O}_{X-S}) \\ &= \mathcal{H}om(\mathcal{D}, i_* \mathcal{O}_{X-S}) = \mathcal{H}om(\mathcal{D}, \mathcal{O}_X) = \mathcal{R}. \end{aligned}$$

(On pourrait aussi, bien entendu, appliquer les critères de Scheja au faisceau  $\mathcal{R}$ .)

#### 4. Démonstration de l'implication (iii) $\implies$ (i).

Nous nous plaçons dans les hypothèses de (iii). Il s'agit de prouver que  $i_*\mathcal{F}$  est cohérent. C'est évident sur  $X - S$ . Il reste donc à montrer que, pour tout  $s \in S$ , le faisceau  $i_*\mathcal{F}$  est cohérent au voisinage de  $s$ . Le problème étant *local*, on peut remplacer  $X$  par un voisinage ouvert quelconque de  $s$ . En particulier, on peut supposer que  $X$  est connexe, donc aussi  $X - S$ . Il s'ensuit que le faisceau  $\mathcal{F}$  est de *rang constant*; soit  $n$  ce rang. Vu (iii), nous pouvons également prendre  $X$  assez petit pour que  $\mathcal{F}$  soit engendré par ses sections sur  $X - S$ .

LEMME 2. — *Il existe un homomorphisme injectif  $f: \mathcal{O}_{X-S}^n \rightarrow \mathcal{F}$ .*

Soit  $x \in X - S$ . Le  $\mathcal{O}_x$ -module  $\mathcal{F}_x$  est de rang  $n$ , et il est engendré par les éléments de  $\Gamma(X - S, \mathcal{F})$ . Il existe donc  $n$  sections  $f_1, \dots, f_n$  de  $\mathcal{F}$  sur  $X - S$  qui sont linéairement indépendantes sur l'anneau  $\mathcal{O}_x$ . Le morphisme  $f: \mathcal{O}_{X-S}^n \rightarrow \mathcal{F}$  défini par les  $f_i$  est injectif au voisinage de  $x$ ; si  $\mathcal{N}$  est son noyau,  $\mathcal{N}$  est sans torsion; le support  $T$  de  $\mathcal{N}$  est donc *ouvert et fermé* dans  $X - S$ . Comme  $x$  n'appartient pas à  $T$ , et que  $X - S$  est connexe,  $T$  est vide, d'où  $\mathcal{N} = 0$  et  $f$  est injectif.

LEMME 3. — *Soit  $Y$  un espace analytique normal connexe, et soient  $\mathcal{A} \subset \mathcal{B}$  deux faisceaux analytiques cohérents sur  $Y$ . On suppose que  $\mathcal{A}$  et  $\mathcal{B}$  sont sans torsion, de même rang, et que  $\mathcal{A}$  est réflexif. Alors le support  $D$  de  $\mathcal{B}/\mathcal{A}$  est un diviseur de  $Y$  (i.e. est de codimension 1 en chacun de ses points).*

Soit  $y \in Y$  et soit  $\mathfrak{a}_y$  l'annulateur de  $\mathcal{B}_y/\mathcal{A}_y$ ; c'est un idéal de  $\mathcal{O}_y$ . Les composantes irréductibles de  $D$  passant par  $y$  correspondent bijectivement aux idéaux premiers  $\mathfrak{p}$  de  $\mathcal{O}_y$  qui contiennent  $\mathfrak{a}_y$  et sont minimaux pour cette propriété. Il s'agit de prouver que ces idéaux sont de hauteur 1 (i.e. minimaux parmi les idéaux premiers non nuls de  $\mathcal{O}_y$ ). Or un tel idéal  $\mathfrak{p}$  ne peut pas être égal à 0 (du fait que  $\mathcal{B}/\mathcal{A}$  est un faisceau de torsion); il suffit donc de prouver que  $\mathfrak{p}$  est de hauteur  $\leq 1$ , ce qui est un résultat connu (BOURBAKI, *Alg. Comm.*, Chap. VII, § 4, prop. 7).

Revenons à  $X$  et  $X - S$ :

LEMME 4. — *Soit  $D$  un diviseur de  $X - S$ . L'adhérence de  $D$  dans  $X$  est un diviseur de  $X$ .*

C'est un cas particulier d'un théorème de REMMERT et STEIN, cf. [11], th. 13, ou [4], exposés 13 et 14.

LEMME 5. — *Il existe un couple  $(U, g)$  vérifiant les conditions suivantes :*

(a)  *$U$  est un voisinage ouvert de  $s$  dans  $X$ .*

(b) *Soit  $V = U - S \cap U$ , et soit  $\mathcal{F} \mid V$  la restriction de  $\mathcal{F}$  à  $V$ . Alors  $g$  est un homomorphisme injectif de  $\mathcal{F} \mid V$  dans  $\mathcal{O}_V^n$ .*

(Autrement dit, quitte à restreindre  $X$ , il existe un plongement de  $\mathcal{F}$  dans  $\mathcal{O}_{X-S}^n$ .)

Choisissons un homomorphisme injectif  $f : \mathcal{O}_{X-S}^n \rightarrow \mathcal{F}$ , cf. lemme 2, et soit  $D$  le support du conoyau de cet homomorphisme. D'après le lemme 3,  $D$  est un diviseur de  $X - S$ , et le lemme 4 montre que son adhérence  $\bar{D}$  est un diviseur de  $X$ . Il existe donc une fonction holomorphe  $h$  sur un voisinage ouvert connexe  $U_1$  de  $s$  qui s'annule sur  $\bar{D} \cap U_1$  et n'est pas identiquement nulle. Soit  $K$  un voisinage compact de  $s$  contenu dans  $U_1$ , et soient  $(D_i)_{i \in I}$  les composantes irréductibles du diviseur  $\bar{D} \cap U_1$  qui rencontrent  $K$ ; les  $D_i$  sont en nombre fini. Comme  $\text{codim. } S \geq 2$ , les  $D_i - S \cap D_i$  sont des diviseurs irréductibles de  $U_1 - S \cap U_1$ ; choisissons un point  $x_i \in D_i - S \cap D_i$ . Puisque le support de Coker  $(f)$  est contenu dans  $D$ , et que  $h$  s'annule sur  $D \cap U_1$ , le théorème des zéros montre qu'il existe une puissance  $h^m$  ( $m \geq 1$ ) de  $h$  qui annule le faisceau Coker  $(f)$  au voisinage des points  $x_i$ . Posons  $\mathcal{A} = (f(\mathcal{O}^n) + h^m \mathcal{F})/f(\mathcal{O}^n)$ ; c'est un faisceau cohérent sur  $V_1 = U_1 - S \cap U_1$ . D'après le lemme 3, appliqué à  $U_1$  et  $S \cap U_1$ , le support  $D'$  du faisceau  $\mathcal{A}$  est un diviseur de  $V_1$ . Il est clair que l'on a  $D' \subset D \cap V_1$ . D'autre part, par construction,  $D'$  ne contient aucun des points  $x_i$ ; si  $D'_j$  est une composante irréductible de  $D'$ , on a donc  $D'_j \neq D_i - S \cap D_i$  pour tout  $i$ , ce qui montre que  $D'_j$  ne rencontre pas  $K$ . Le faisceau  $\mathcal{A}$  est donc nul sur  $K \cap V_1$ . Prenons alors pour  $U$  un voisinage ouvert connexe de  $s$  contenu dans  $K$ . Puisque la restriction  $\mathcal{A} \mid V$  de  $\mathcal{A}$  à  $V = U - S \cap U$  est égale à 0, on a  $h^m \cdot \mathcal{F} \mid V \subset f(\mathcal{O}_V^n)$ . Il existe donc un morphisme  $g : \mathcal{F} \mid V \rightarrow \mathcal{O}_V^n$  tel que le composé  $f \circ g$  soit égal à la multiplication par  $h^m$ . Puisque  $h$  n'est pas identiquement nulle,  $f \circ g$  est injectif, donc aussi  $g$ , ce qui démontre le lemme.

Quitte à remplacer  $X$  par  $U$ , le lemme 5 nous permet de supposer que  $\mathcal{F}$  est un sous-faisceau du faisceau  $\mathcal{O}_{X-S}$ . Nous ferons désormais cette hypothèse.



LEMME 6. — *Il existe un sous-faisceau cohérent  $\mathcal{G}$  de  $\mathcal{O}_X^n$  qui prolonge  $\mathcal{F}$ .*

Vu l'hypothèse faite au début,  $\mathcal{F}$  est engendré par le groupe  $\Gamma$  de ses sections sur  $X - S$ . Mais, puisque  $\mathcal{F}$  est un sous-faisceau du faisceau  $\mathcal{O}_{X-S}^n$ , toute section  $a$  de  $\mathcal{F}$  s'identifie à une section de  $\mathcal{O}_{X-S}^n$ . D'après ce qui a été dit au n° 3, cette dernière se prolonge en une section  $\tilde{a}$  de  $\mathcal{O}_X^n$  sur  $X$  tout entier. Soit  $\mathcal{G}$  le sous-faisceau de  $\mathcal{O}_X^n$  engendré par les  $\tilde{a}$ , pour  $a \in \Gamma$ . D'après la prop. 2, c'est un faisceau cohérent; d'autre part, il est clair que sa restriction à  $X - S$  est égale à  $\mathcal{F}$ .

LEMME 7. — *Si  $\mathcal{G}$  est un sous-faisceau cohérent de  $\mathcal{O}_X^n$ , on a  $\mathcal{H}_S^0 \mathcal{G} = 0$  et  $\mathcal{H}_S^1 \mathcal{G}$  est cohérent.*

D'après la prop. 4, on a  $\mathcal{H}_S^0 \mathcal{O}_X^n = \mathcal{H}_S^1 \mathcal{O}_X^n = 0$ . En appliquant la suite exacte des foncteurs dérivés à la suite exacte

$$0 \rightarrow \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{O}_X^n \rightarrow \mathcal{O}_X^n / \mathcal{G} \rightarrow 0,$$

on voit que  $\mathcal{H}_S^0 \mathcal{G} = 0$  et que  $\mathcal{H}_S^1 \mathcal{G}$  est isomorphe à  $\mathcal{H}_S^0 (\mathcal{O}_X^n / \mathcal{G})$ , lequel est cohérent (prop. 3).

*Fin de la démonstration du théorème 1 :*

Soit  $\mathcal{G}$  un faisceau vérifiant la condition du lemme 6. On a

$$i^* \mathcal{G} = \mathcal{F},$$

et la suite exacte (\*\*) du n° 3 s'écrit ici :

$$0 \rightarrow \mathcal{H}_S^0 \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{G} \rightarrow i_* \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{H}_S^1 \mathcal{G} \rightarrow 0.$$

D'après le lemme 7,  $\mathcal{H}_S^0 \mathcal{G}$  est nul et  $\mathcal{H}_S^1 \mathcal{G}$  est cohérent. Le faisceau  $i_* \mathcal{F}$  est donc extension des deux faisceaux cohérents  $\mathcal{H}_S^1 \mathcal{G}$  et  $\mathcal{G}$ . Cela entraîne qu'il est cohérent, cqfd.

## 5. Compléments et contre-exemples.

Nous conservons les hypothèses du théorème 1 :  $X$  est normal,  $\mathcal{F}$  sans torsion, et  $\text{codim. } S \geq 2$  en tout point. Si  $\mathcal{F}$  vérifie les conditions (i), (ii), (iii), on dit que  $\mathcal{F}$  est *prolongeable*.

PROPOSITION 5. — *Si  $\mathcal{F}$  est isomorphe à un quotient d'un faisceau prolongeable,  $\mathcal{F}$  est prolongeable.*

C'est évident sur la condition (iii).

PROPOSITION 6. — *Supposons  $X$  compacte. Alors  $H^0(X - S, \mathcal{F})$  est de dimension finie.*

Soit  $\mathcal{F}_1$  le sous-faisceau de  $\mathcal{F}$  engendré par les sections de  $\mathcal{F}$  sur  $X - S$ . D'après la prop. 2, c'est un faisceau cohérent. On a :

$$H^0(X - S, \mathcal{F}) = H^0(X - S, \mathcal{F}_1) = H^0(X, i_* \mathcal{F}_1).$$

Le faisceau  $\mathcal{F}_1$  vérifie la condition (iii). D'après le th. 1,  $i_* \mathcal{F}_1$  est donc cohérent. Comme  $X$  est compacte, il en résulte que  $H^0(X, i_* \mathcal{F}_1)$  est de dimension finie (cf. par exemple [10], p. 241), d'où la proposition.

PROPOSITION 7. — *Supposons  $\mathcal{F}$  réflexif et prolongeable. Alors  $i_* \mathcal{F}$  est réflexif, et c'est l'unique faisceau réflexif de  $X$  qui prolonge  $\mathcal{F}$ .*

Soit  $\mathcal{G}$  un faisceau cohérent prolongeant  $\mathcal{F}$ , et soit  $\mathcal{G}''$  son bidual; il est clair que  $\mathcal{G}''$  prolonge  $\mathcal{F}$  et que c'est un faisceau réflexif (cf. BOURBAKI, *Alg. Comm.*, chap. VII, p. 50); on a vu au n° 3 que  $\mathcal{G}'' = i_* i^* \mathcal{G}''$ . Mais  $i^* \mathcal{G}'' = \mathcal{F}$ . D'où  $\mathcal{G}'' = i_* \mathcal{F}$ , ce qui montre que  $i_* \mathcal{F}$  est réflexif, et coïncide avec  $\mathcal{G}$  si  $\mathcal{G}$  est réflexif.

*Remarques.*

1) Les faisceaux de fonctions automorphes (à valeurs scalaires ou vectorielles) sont réflexifs.

2) La prop. 7 s'applique notamment au cas où  $\mathcal{F}$  est localement libre et prolongeable; elle montre que  $i_* \mathcal{F}$  est réflexif. Si  $X$  est non singulière et de dimension 2, cela entraîne que  $i_* \mathcal{F}$  est localement libre (en effet, on sait qu'un module réflexif de type fini sur un anneau local régulier de dimension 2 est libre); on obtient donc ainsi un critère de prolongement des fibrés vectoriels sur  $X - S$ . L'hypothèse  $\dim X = 2$  est essentielle, comme le montre le contre-exemple a) ci-dessous.

*Contre-exemples.*

a) *Un faisceau localement libre prolongeable  $\mathcal{F}$  tel que  $i_* \mathcal{F}$  ne soit pas localement libre.*

Prenons  $X = \mathbb{C}^n$ ,  $n \geq 3$ , et  $S = \{0\}$ . Soit  $E$  un fibré vectoriel sur

l'espace projectif  $\mathbf{P}_{n-1}(\mathbf{C})$ , et soit  $E'$  son image réciproque sur  $X - S$  par la projection naturelle  $X - S \rightarrow \mathbf{P}_{n-1}(\mathbf{C})$ . Soit  $\mathcal{F}$  le faisceau localement libre des germes de sections de  $E'$ . On peut montrer (par exemple en utilisant le fait que  $E$  est algébrique [13]) que  $\mathcal{F}$  est prolongeable, et que  $i_* \mathcal{F}$  est localement libre si et seulement si  $E$  est somme directe de fibrés de rang 1. Or, pour  $n \geq 3$ , on sait qu'il existe des fibrés qui ne sont pas de ce type (le fibré tangent, par exemple).

b) *Faisceaux non prolongeables.*

Les plus simples sont les faisceaux d'idéaux associés à des sous-espaces analytiques non prolongeables de  $X - S$  (par exemple une suite de points tendant vers  $S$ ). Voici un exemple moins trivial, qui a l'avantage d'être *localement libre* :

Prenons  $X = \mathbf{C}^2$ ,  $S = \{0\}$ . Soit  $\mathcal{O}_X^*$  le faisceau des éléments inversibles de  $\mathcal{O}_X$ . L'application exponentielle définit un isomorphisme

$$H^1(X - S, \mathcal{O}_{X-S}) \rightarrow H^1(X - S, \mathcal{O}_{X-S}^*).$$

Or  $H^1(X - S, \mathcal{O}_{X-S})$  est facile à déterminer : c'est un espace vectoriel de dimension infinie ([7], p. 203). Il existe donc un élément non trivial  $f \in H^1(X - S, \mathcal{O}_{X-S}^*)$ ; soit  $F$  le fibré de rang 1 correspondant, et soit  $\mathcal{F}$  le faisceau associé. Ce faisceau *n'est pas prolongeable*. En effet, s'il l'était,  $i_* \mathcal{F}$  serait localement libre de rang 1 (cf. Remarque 2 ci-dessus), donc correspondrait à un élément  $\tilde{f}$  de  $H^1(X, \mathcal{O}_X^*)$ . Mais  $H^1(X, \mathcal{O}_X^*)$  est isomorphe à  $H^1(X, \mathcal{O}_X)$ , qui est nul. On aurait donc  $\tilde{f} = 0$ , d'où *a fortiori*  $f = 0$ , contradiction.

*Question.*

Si  $\text{codim. } S \geq 3$ , est-il vrai que tout faisceau localement libre (ou même seulement réflexif) sur  $X - S$  est prolongeable ?

## 6. Le cas projectif.

Conservons les notations et hypothèses du théorème 1, et supposons que  $X$  soit projective, i.e. soit un sous-espace analytique fermé d'un espace projectif  $\mathbf{P}_N(\mathbf{C})$ . D'après un théorème de Chow,  $X$  et  $S$  sont alors algébriques. Si  $\mathcal{A}$  est un faisceau *algébrique* cohérent sur  $X$  (ou sur  $X - S$ ), on notera  $\mathcal{A}^b$  le faisceau analytique cohérent associé (cf. [13], n° 9).

THÉORÈME 2. — Si  $X$  est projective, et si les hypothèses du théorème 1 sont vérifiées, les conditions (i), (ii), (iii) sont équivalentes à chacune des deux suivantes :

(iv) Il existe un faisceau algébrique cohérent  $\mathcal{A}$  sur  $X - S$  tel que  $\mathcal{A}^h$  soit isomorphe à  $\mathcal{F}$ .

(v) Pour tout  $x \in X - S$ , il existe un entier  $n$  tel que  $H^0(X - S, \mathcal{F}(n))$  engendre  $\mathcal{F}(n)_x$ .

(Le faisceau  $\mathcal{F}(n)$  est défini comme le produit tensoriel du faisceau  $\mathcal{F}$  et du faisceau  $\mathcal{O}(n)$ , cf. [13], n° 16.)

Il suffit de prouver que (iv)  $\implies$  (ii)  $\implies$  (v)  $\implies$  (iii).

(iv)  $\implies$  (ii) : d'après un théorème de Grothendieck (cf. [2], prop. 2) tout faisceau algébrique cohérent  $\mathcal{A}$  sur  $X - S$  se prolonge en un faisceau algébrique cohérent  $\mathcal{B}$  sur  $X$ . Si  $\mathcal{A}^h = \mathcal{F}$ , il s'ensuit que  $\mathcal{B}^h$  prolonge  $\mathcal{F}$ .

(ii)  $\implies$  (v) : si  $\mathcal{F}$  se prolonge en un faisceau analytique cohérent  $\mathcal{G}$ , on sait (cf. [13]) qu'il existe un entier  $n$  tel que  $H^0(X, \mathcal{G}(n))$  engendre  $\mathcal{G}(n)_x$  pour tout  $x \in X$ . *A fortiori*,  $H^0(X - S, \mathcal{F}(n))$  engendre  $\mathcal{F}(n)_x$  pour tout  $x \in X - S$ .

(v)  $\implies$  (iii) : soit  $s \in S$ , et soit  $E$  un hyperplan de  $\mathbf{P}_N(\mathbf{C})$  ne passant pas par  $s$ . Soit  $U = X - X \cap E$ , et soit  $x \in U - S \cap U$ . D'après (v), il existe un entier  $n$  tel que  $\mathcal{F}(n)_x$  soit engendré par  $H^0(X - S, \mathcal{F}(n))$ , donc aussi par  $H^0(U - S \cap U, \mathcal{F}(n))$ . Mais le faisceau  $\mathcal{O}(n)$  est isomorphe au faisceau  $\mathcal{O}_X$  au-dessus du complémentaire de  $E$ ; le faisceau  $\mathcal{F}(n)$  est donc isomorphe au faisceau  $\mathcal{F}$  au-dessus de  $U - S \cap U$ , qui est contenu dans  $X - E$ . On en conclut que  $\mathcal{F}_x$  est engendré par  $H^0(U - S \cap U, \mathcal{F})$  pour tout  $x \in U - S \cap U$ , ce qui démontre (iii).

*Remarques.*

1) Le théorème 2 montre que les faisceaux prolongeables coïncident avec les faisceaux algébriques.

2) Si  $\mathcal{F}$  est prolongeable, on peut prouver que le faisceau algébrique  $\mathcal{A}$  tel que  $\mathcal{F} \simeq \mathcal{A}^h$  est déterminé à isomorphisme unique près. De plus, on a  $i_* \mathcal{F} \simeq (i_* \mathcal{A})^h$ .

*Question.*

Soit  $X$  un espace algébrique complexe (non nécessairement projectif), soit  $S$  un sous-espace algébrique fermé de  $X$ , et soit  $\mathcal{A}$  un faisceau algébrique cohérent sur  $X$ . Supposons que les faisceaux algébriques  $\mathcal{H}_s^i \mathcal{A}$

soient cohérents pour  $0 \leq i \leq m$  (cf. [9], *loc. cit.*). Est-il vrai que les homomorphismes canoniques

$$(\mathcal{H}_s^i \mathcal{A})^h \rightarrow \mathcal{H}_s^i(\mathcal{A}^h)$$

sont des *isomorphismes* pour  $0 \leq i \leq m$ ? Cela montrerait en particulier que les faisceaux analytiques  $\mathcal{H}_s^i(\mathcal{A}^h)$  sont *cohérents*.

### BIBLIOGRAPHIE

- [1] W. L. BAILY et A. BOREL, *Compactification of arithmetic quotients of bounded symmetric domains*. Ann. of Maths., 84 (1966).
- [2] A. BOREL et J.-P. SERRE, *Le théorème de Riemann-Roch (d'après des résultats inédits de A. Grothendieck)*. Bull. Soc. Math. France, 86 (1958), 97-136.
- [3] H. CARTAN, *Idéaux de fonctions analytiques de  $n$  variables complexes*. Ann. Ecole Norm. Sup., 61 (1944), 149-197.
- [4] H. CARTAN, *Variétés analytiques complexes et fonctions automorphes*. Séminaire E.N.S., Paris, 1953-54.
- [5] H. CARTAN, *Familles d'espaces complexes et fondements de la géométrie analytique*. Séminaire E.N.S., Paris, 1960-61.
- [6] A. DOUADY, *Le problème des modules pour les sous-espaces analytiques compacts d'un espace analytique donné*. Ann. Inst. Fourier, 16 (1966), 1-98.
- [7] J. FRENKEL, *Cohomologie non abélienne et espaces fibrés*. Bull. Soc. Math. France, 83 (1957), 135-218.
- [8] A. GROTHENDIECK, *Local cohomology* (Notes by Robin Hartshorne). Harvard Univ., 1961.
- [9] A. GROTHENDIECK, *Séminaire de géométrie algébrique* (Notes prises par un groupe d'auditeurs). Paris, I.H.E.S., 1962.
- [10] R. GUNNING et H. ROSSI, *Analytic functions of several complex variables*. Prentice-Hall, 1965.
- [11] R. REMMERT et K. STEIN, *Ueber die wesentlichen Singularitäten analytischer Mengen*. Math. Annalen, 126 (1953), 263-306.
- [12] G. SCHEJA, *Fortsetzungssätze der komplex-analytischen Cohomologie und ihre algebraische Charakterisierung*. Math. Annalen, 157 (1964), 75-94.
- [13] J.-P. SERRE, *Géométrie algébrique et géométrie analytique*. Ann. Inst. Fourier, 6 (1956), 1-42.

*Manuscrit reçu le 15 avril 1966.*

JEAN-PIERRE SERRE,  
Collège de France