GEORGES GLAESER

Racine carrée d'une fonction différentiable

Annales de l'institut Fourier, tome 13, nº 2 (1963), p. 203-210
<http://www.numdam.org/item?id=AIF_1963__13_2_203_0>

Ann. Inst. Fourier, Grenoble
13,2(1963), 203-210.

RACINE CARRÉE D'UNE FONCTION DIFFÉRENTIABLE

par Georges GLAESER (Rennes)

I

Nous étudions dans cet article les propriétés locales de $\sqrt{f}$ pour certaines classes de fonctions numériques f définies dans un espace affine E de dimension finie. Nous supposons toujours que $f \geqslant 0$, et désignons par $F \subset E$ l'ensemble fermé où f s'annulle. On dit qu'une fonction de classe C^m est p-plate sur un ensemble ($p \leqslant m$) lorsqu'elle s'annulle sur cet ensemble ainsi que ses dérivés partielles jusqu'à l'ordre p inclus.

THÉORÈME. — *Si f est de classe* C^2, et 2-*plate sur l'ensemble* F *de ses zéros, la fonction* $g = \sqrt{f}$ *est de classe* C^1 (*et* 1 *plate sur* F).

L'hypothèse de 2-platitude est évidemment essentielle comme le montre l'exemple trivial de la fonction x^2 dont la racine carrée $|x|$ n'est pas de classe C^1.

Le contre-exemple du § 3 montre que si la classe de f et sa platitude sur F sont supposées plus élevées on ne peut pas améliorer la conclusion du théorème précédent. Des hypothèses sur la régularité de F n'améliore pas les conclusions.

II

La démonstration du théorème repose sur plusieurs lemmes : le premier m'a été indiqué par B. Malgrange.

LEMME I. — *Soit φ une fonction de classe* C^2 *strictement positive définie sur l'axe réel* R. *Supposons que la dérivée seconde de φ soit majorée par une constante* $M > 0$. *Alors le module de la dérivée première de $\sqrt{\varphi}$ est majoré par* $\sqrt{M/2}$.

En effet

$$0 < \varphi(x+h) = \varphi(x) + h\varphi'(x) + \frac{h^2}{2}\varphi''(\xi) \leqslant \varphi(x) + h\varphi'(x) + \frac{h^2}{2}\mathrm{M}.$$

Pour x fixé, le trinôme du second degré (en h)

$$\varphi(x) + h\varphi'(x) + \frac{h^2}{2}\mathrm{M}$$

est strictement positif. Donc

$$(\varphi'(x))^2 < 2\mathrm{M}\varphi(x)$$

ou encore

$$\frac{|\varphi'(x)|}{2\sqrt{\varphi(x)}} < \sqrt{\mathrm{M}/2}.$$

Il nous sera également commode d'utiliser le lemme suivant (dû à Hestenes ([2]). Nous rappelons la démonstration en appendice pour la commodité du lecteur). Ce lemme permet de « recoller » plusieurs fonctions entre elles.

Étant donnée une fonction f de classe C^m définie dans un ouvert $\mathbf{0}$ de $\mathbf{E}$, nous désignons par $\mathrm{T}_{\mathrm{A}}f$ le polynôme de Taylor (d'ordre m) de f calculé au point $\mathrm{A} \in \mathbf{0}$.

Lemme d'Hestenes. — *Soit* F *un fermé de* $\mathbf{E}$, *et deux fonctions* φ *et* ψ *de classe* C^m, φ *étant définie sur* $\mathbf{E}$ *et* ψ *dans l'ouvert* $\mathbf{E} - \mathbf{F}$. *Considérons le champ de polynômes* $\mathrm{A} \to \mathrm{P}_{\mathrm{A}}$ *défini ainsi :*

$$\begin{cases} \mathrm{P}_{\mathrm{A}} = \mathrm{T}_{\mathrm{A}}\varphi & \text{si } \mathrm{A} \in \mathrm{F} \\ \mathrm{P}_{\mathrm{A}} = \mathrm{T}_{\mathrm{A}}\psi & \text{si } \mathrm{A} \notin \mathrm{F}. \end{cases}$$

Une condition nécessaire et suffisante pour qu'il existe une fonction f *de classe* C^m *(nécessairement unique) telle que* $\mathrm{P}_{\mathrm{A}} = \mathrm{T}_{\mathrm{A}}f$ *en tout point* $\mathrm{A} \in \mathbf{E}$, *est que le champ* P_{A} *varie continûment sur* $\mathbf{E}$.

Il suffit d'ailleurs que φ soit définie dans un voisinage de F.

Nous utilisons enfin un lemme de Šilov (cf. [1] p. 251).

Lemme de Šilov. — *Si* F *est compact, pour tout* $\rho > 0$ *on peut construire une fonction* $\alpha_\rho \geqslant 0$ *de classe* C^∞, *égale à* 1 *sur le* ρ*-voisinage de* F, *nulle hors du* 2ρ*-voisinage de* F *et telle que pour toute fonction* f *de classe* C^m, m*-plate sur* F *le produit* $\alpha_\rho . f$ *tend uniformément vers* 0 *ainsi que ses dérivées jusqu'à l'ordre total* m, *lorsque* ρ *tend vers* 0.

Démonstration du théorème. — La fonction $\sqrt{f}$ est évidemment de classe C^2 dans $E - F$. C'est au voisinage d'un point A appartenant à la frontière de F que se présentent les difficultés. Pour établir que $\sqrt{f}$ est de classe C^1 au voisinage de A, on peut (quitte à modifier f en dehors d'un voisinage de A) supposer que f est à support compact.

Étant donnés deux nombres positifs ρ et ε, considérons la fonction $f_{\rho,\varepsilon} = \alpha_\rho . f + \varepsilon$ (où α_ρ a la même signification que dans le lemme de Šilov).

La restriction de $f_{\rho,\varepsilon}$ à toute droite tracée dans E satisfait aux hypothèses du lemme 1.

Désignons par M_ρ la borne supérieure de la somme des modules des dérivées partielles secondes de $\alpha_\rho . f$ dans E.

Le lemme 1 prouve que la différentielle de $\sqrt{f_{\rho,\varepsilon}}$ a sa norme majorée par $\sqrt{M_\rho/2}$.

Faisons tendre ε vers 0, ρ restant provisoirement fixe. La majoration précédente, par $\sqrt{M_\rho/2}$ s'applique encore à la différentielle de $\sqrt{\alpha_\rho . f}$ *en tout point de* $E - F$ (où $\sqrt{\alpha_\rho . f}$ est de classe C^2).

Considérons les dérivées partielles premières de $\sqrt{f}$ en un point $B \in E - F$. Lorsque B tend vers A la limite supérieure de ces dérivées partielles est égale à la même limite supérieure calculée sur $\sqrt{\alpha_\rho . f}$ (puisque $\alpha_\rho . f$ et f sont égales au voisinage de A. On en déduit que la limite supérieure des dérivées partielles premières de $\sqrt{f}$ (qui ne dépend pas de ρ) est majorée par $\sqrt{M_\rho/2}$, pour tout ρ. En faisant maintenant tendre ρ vers 0, et en utilisant le lemme de Šilov, on démontre que la différentielle de $\sqrt{f}$ (définie dans $E - F$) tend vers 0 lorsque l'on s'approche de F.

Considérons maintenant la paire de fonctions suivantes. La fonction φ identiquement nulle dans E, et la fonction $\psi = \sqrt{f}$ qui est de classe C^2 (et par conséquent de classe C^1 dans $E - F$. Nous venons de voir que les champs de polynôme de Taylor de φ et ψ se raccordent continûment comme dans l'énoncé du lemme d'Hestenes. Il résulte de ce lemme qu'il existe une fonction de classe C^1 qui est égale à la fonction $\sqrt{f}$ (dont on savait a priori qu'elle était continue).

III

Nous allons construire une fonction F de classe C^∞, définie sur **R**, infiniment plate à l'origine, strictement positive pour $x \neq 0$, et dont *la racine carrée n'est pas de classe* C^2.

Cela montre que le théorème précédent ne peut pas être amélioré moyennant des hypothèses supplémentaires sur la classe et la platitude de f.

Cependant, il nous semble plausible qu'en supposant que f (ou peut-être certaines dérivées de f) soit monotone dans chacun des intervalles $\mathbf{R}^+$ et $\mathbf{R}^-$ une généralisation aux fonctions de classe C^m puisse être obtenue.

Contre-exemple. — Pour rendre les calculs plus agréables nous commencerons par construire une fonction $\varphi \geqslant 0$ de classe C^∞, infiniment plate à l'origine, strictement positive pour $x \neq 0$, croissante, (au sens large) dans $\mathbf{R}^+$ et décroissante dans $\mathbf{R}^-$, et constante au voisinage de chaque point d'abscisse $1/n$ (où n est un entier $\geqslant 1$).

Une telle fonction φ peut s'obtenir aisément par le théorème du prolongement de Whitney. On peut également l'obtenir par intégration.

(On utilise pour cela une suite de fonctions $\psi_n \geqslant 0$ de classe C^∞, telles que le support de ψ_n soit contenu dans l'intervalle ouvert $]1/(n+1), 1/n[$. On peut alors trouver une suite scalaire $\lambda_n > 0$ décroissant suffisamment vite pour que la série $\sum \lambda_n \psi_n$ soit convergente, au sens de la convergence uniforme sur R de chacune des dérivées. La somme ψ de cette série est une fonction C^∞ indéfiniment plate à l'origine. ψ est la dérivée de la fonction φ que nous cherchons.)

A partir de φ nous construisons une fonction $F(x)$ définie par

$$F(x) = \varphi(x)[\sin^2 \pi/x + \varphi(x)] \quad \text{pour } x \neq 0, \ F(0) = 0$$

$F(x)$ est de classe C^∞. En effet les dérivées successives de $\sin^2 \pi/x$ admettent une croissance polynomiale en $1/x$ lorsque x tend vers 0. On en déduit que chacune des dérivées de F se prolonge par continuité, par 0, à l'origine. (Ceci est un cas très élémentaire du lemme d'Hestenes lorsque F se réduit à $\{0\}$).

Pour étudier $\sqrt{F}$, nous calculons un développement limité d'ordre 2 de $\sqrt{F}$ au voisinage de $1/n$ (où n est un entier provisoirement fixé). Posons $x = 1/n + \alpha$.

On trouve $\sin \pi/x = \sin(n\pi - n^2\pi\alpha) + o(\alpha)$

$$\sin^2 \pi/x = n^4\pi^2\alpha^2 + o(\alpha^2)$$

comme, par construction $\varphi(1/n + \alpha) = \varphi(1/n) + o(\alpha^2)$, on obtient

$$F(x) = [\varphi(1/n)]^2 \left(1 + \frac{n^4\pi^2\alpha^2}{\varphi(1/n)}\right) + o(\alpha^2)$$

et enfin

$$\sqrt{F(x)} = \varphi(1/n) + \frac{n^4\pi^2\alpha^2}{2} + o(\alpha^2).$$

Ceci montre que la dérivée seconde de $\sqrt{F(x)}$ au point $1/n$, égale à $n^4\pi^2$ ne reste pas bornée lorsque n augmente. $\sqrt{F(x)}$ n'est par conséquent pas de classe C^2 au voisinage de l'origine.

Remarque. — D'une façon plus heuristique, on remarque que la racine carrée de la fonction $\varphi(x) \sin^2 \pi/x$, qui s'annulle en $x = 1/n$ n'est pas de classe C^1 en ce point (le graphe y admet un point anguleux).

La fonction $F(x) = \varphi(x) \sin^2 \pi/x + [\varphi(x)]^2$ est strictement positive au voisinage de $1/n$. Mais le graphe de $\sqrt{F}$ présente une forte courbure, au point d'abscisse $1/n$. On comparera ce graphe au graphe de la fonction $y = \sqrt{x^2 + \varepsilon^2}$ qui est une branche d'hyperbole voisine de la courbe d'équation $y = |x|$, et qui présente une forte courbure au sommet, lorsque ε est petit.

APPENDICE

Démonstration du lemme d'Hestenes (reprise d'après [2]).

Il suffit de démontrer le lemme pour $m = 1$ (on s'élève à m quelconque par une récurrence immédiate), et pour un espace **E** à 1 dimension (on utilisera le théorème classique qui affirme qu'une fonction est continûment différentiable si elle admet des dérivées partielles continues (par rapport à l'ensemble des variables).

On est amené à étudier le champ de polynômes du 1^er^ degré.

$$P_a(x) = f(a) + (x - a)f_1(a)$$

où

$$f(a) \text{ est égal à } \varphi(a) \text{ ou } \psi(a)$$

et

$$f_1(a) \text{ est égal à } \varphi'(a) \text{ ou } \psi'(a)$$

selon que a appartient où n'appartient pas à **F**. Par hypothèse, f_1 (comme f d'ailleurs) est continue sur **E** et possède par conséquent une primitive k de classe C^1. En substituant, au champ $P_a(x)$ le champ $P_a(x) - T_a k(x)$, on se ramène au cas où f_1 est identiquement nul dans **E**, ce que nous supposons réalisé.

On posera $l = f - k$ et $l_1 = 0$.

Nous allons montrer que si a est un point de la frontière de **F**, la fonction l possède une dérivée nulle en a. Soit en effet $b \neq a$.

1° Si $b \in \mathbf{F}$, on peut remplacer l par $\varphi - k$ dans le rapport $\dfrac{l(a) - l(b)}{a - b}$. Comme $f - k$ admet une dérivée nulle en a, on en déduit que le rapport précédent tend vers 0 lorsque b tend vers a en restant dans F.

2° Si $b \notin \mathrm{F}$, la composante connexe de b dans $\mathrm{E} - \mathrm{F}$ est un intervalle. Il existe un point $b_1 \in \mathrm{F}$ tel que b_1 soit compris au sens large entre a et b, et que $]b_1, b[\subset \mathrm{E} - \mathrm{F}$.

La fonction l ayant une dérivée nulle sur l'intervalle $]b_1 b[$ y est constante et $l(b) = l(b_1)$.

Par conséquent

$$\left|\frac{l(a) - l(b)}{a - b}\right| = \left|\frac{l(a) - l(b_1)}{a - b}\right| \leqslant \left|\frac{l(a) - l(b_1)}{a - b_1}\right|.$$

En utilisant 1°, puisque $b_1 \in \mathrm{F}$ on en conclut que le rapport du 1^er^ membre tend vers 0, lorsque b tend vers a.

En conclusion la fonction f est dérivable en chaque point de E et sa dérivée est égale à f_1 qui est continue. Donc f est de classe C^1.

Remarque. — Le lemme d'Hestenes peut aussi s'énoncer sous la forme suivante : Soit $\mathrm{A} \to \mathrm{P}_\mathrm{A}$ un champ de polynômes défini sur E satisfaisant aux trois conditions suivantes :

1° Le champ P_A varie continûment.

2° La restriction de P_A à l'ensemble fermé F est « prolongeable » en une fonction C^m de E (c'est-à-dire égal au champ des polynômes de Taylor d'une certaine fonction φ de classe C^m dans E).

3° La restriction de P_A à l'ouvert $\mathrm{E} - \mathrm{F}$ est le champ des polynômes de Taylor d'une fonction ψ de classe C^m dans cet ouvert.

Sous ces hypothèses, le champ P_A est le champ des polynômes de Taylor d'une fonction de classe C^m définie dans E par $\mathrm{A} \to \mathrm{P}_\mathrm{A}(\mathrm{A})$. Dans le cas où F ne comprend que des points isolés la condition 2°) est satisfaite « ipso facto ». Cette condition est évidemment nécessaire lorsque F possède des points intérieurs. Mais la condition 2° demande à être vérifiée soigneusement même en dehors de ce cas.

Exemple. — Considérons la célèbre fonction singulière de Lebesgue φ, croissante dans l'intervalle $[0, 1]$ localement constante en dehors de l'ensemble triadique de Cantor K. Cette fonction est évidemment de classe C^1 en dehors de K et la fonction φ, (ainsi que sa dérivée nulle) se prolonge par continuité en K. Cependant φ n'est pas de classe C^1 sur $[0, 1]$, sinon, ayant une dérivée nulle, elle serait constante :

Mais il est clair que la condition 2° n'est pas vérifiée. Le champ des polynômes $P_a(x) = \varphi(a) + (x - a) \quad \varphi_1(a) = \varphi(a)$ (puisque $\varphi_1 \equiv 0$) n'est pas prolongeable en une fonction de classe C^1, car φ n'est même pas lipschitzienne.

BIBLIOGRAPHIE

[1] Glaeser, Multiplicateur rugueux de fonctions différentiables et la synthèse spectrale, *Annale Sc. de l'Ec. Norm. Sup.*, 79, 1962, 251.

[2] Hestenes, Extension of the range of differentiable functions, *Duke Math. Journal*, 1941, vol. 7.