ANNALES DE L'INSTITUT FOURIER

JOSEPH KLEIN

Les systèmes dynamiques abstraits

Annales de l'institut Fourier, tome 13, nº 2 (1963), p. 191-202

<http://www.numdam.org/item?id=AIF_1963__13_2_191_0>

Ann. Inst. Fourier, Grenoble
13, 2 (1963), 191-202.

LES SYSTÈMES DYNAMIQUES ABSTRAITS,

par **Joseph KLEIN** (Grenoble)

---

1. Soit une variété différentiable V de classe C^∞, de dimension $n+1$, $\mathfrak{V}$ l'espace fibré des vecteurs non nuls tangents à V, W l'espace fibré des directions tangentes à V.

Supposons que V soit l'espace-temps de configuration d'un système dynamique à liaisons holonomes, bilatérales, parfaites à n degrés de liberté, les forces pouvant dépendre à la fois des paramètres de position et de vitesse.

Désignons par $x^\alpha (\alpha = 1, \ldots, n+1)$ un système de coordonnées locales d'un point x de V : $x^1, \ldots, x^n$ désignent des paramètres de position, x^{n+1} le temps. Soit u un paramètre arbitraire pris comme variable indépendante. Posons $\dot{x}^\alpha = \dfrac{dx^\alpha}{du}$. Les équations de Lagrange du mouvement sont :

$$\frac{d}{du}\partial_{\dot\alpha}L - \partial_\alpha L = X_\alpha, \tag{1}$$

L désigne le lagrangien du système, X_α, le covecteur force généralisée ;

$$\partial_{\dot\alpha}L = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}^\alpha}; \qquad \partial_\alpha L = \frac{\partial L}{\partial x^\alpha}.$$

On sait [1] que ces équations sont obtenues à partir du système associé de la 2-forme :

$$\Omega = d(\partial_{\dot\alpha}L\, dx^\alpha) + \frac{1}{2} S_{\alpha\beta}\, dx^\alpha \wedge dx^\beta \tag{2}$$

avec

$$S_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}(\partial_{\dot\beta}X_\alpha - \partial_{\dot\alpha}X_\beta);$$

d'où

$$S_{\alpha\beta}\dot{x}^{\beta} = X_{\alpha}.$$

La forme Ω définie sur W, se réduit à :

$$\Omega = d(\partial_{\dot{\alpha}}L) \wedge dx^{\alpha},$$

pour les systèmes dynamiques conservatifs et définit l'invariant intégral absolu d'E. Cartan.

Dans ce qui suit nous nous proposons de caractériser les 2-formes Ω définies sur W qui sont susceptibles de prendre l'expression locale (2).

A cet effet, nous allons introduire un opérateur différentiel noté $\dot{d}$, opérant sur les formes de $\mathcal{V}$. Cet opérateur est une dérivation de 2^e espèce au sens de Frölicher-Nijenhuis mais l'exposé qui suit, introduira cet opérateur de façon élémentaire.

Le théorème que nous nous proposons de démontrer est le suivant :

Théorème. — *Soit une 2-forme définie sur* W. *Pour que son image réciproque* Ω *sur* $\mathcal{V}$ *puisse se mettre sous la forme locale* (2) *il faut et il suffit que :*

$$\dot{d}\Omega = 0.$$

Si cette forme Ω est de rang maximum, nous dirons qu'elle définit qur W *une structure de système dynamique abstrait* admettant L comme lagrangien, $S_{\alpha\beta}$ comme tenseur-force.

2. Définition de $\dot{d}f$.

Un point z de $\mathcal{V}$ est défini par un point x de V et un vecteur y tangent en x à V.

Si x^{α} est un système de coordonnées locales de x, si y^{α} sont les composantes de y sur le repère naturel associé, l'ensemble (x^{α}, y^{α}) constitue un système de coordonnées locales de z, dit *admissible.*

Dans la suite nous ne considérons que des coordonnées locales admissibles; les changements de cartes sont alors induits sur $\mathcal{V}$ par des changements de cartes sur V :

$$x^{\alpha} \to x^{\alpha'} = f^{\alpha'}(x^{\beta}).$$

Il leur correspond dans T_z espace tangent en z à $\mathfrak{V}$, le groupe fondamental G, sous-groupe de GL $(2n + 2, R)$ représenté par les matrices M de la forme :

$$M = \begin{Vmatrix} A & 0 \\ B & A \end{Vmatrix}$$

où 0 désigne la matrice nulle d'ordre $n + 1$, avec

$$A = ||\partial_\beta f^{\alpha'}|| \qquad B = ||y^\gamma \partial_{\gamma\beta} f^{\alpha'}||.$$

Soient $\begin{pmatrix} dx \\ dy \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} dx' \\ dy' \end{pmatrix}$ les matrices colonnes des composantes d'un vecteur de T_z dans les systèmes x^α et $x^{\alpha'}$, (a, b), (a', b') les matrices lignes des composantes d'un covecteur de T_z dans les systèmes x^α et $x^{\alpha'}$.

Nous avons :

$$\begin{pmatrix} dx' \\ dy' \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} dx \\ dy \end{pmatrix},$$
$$(a', b') = (a, b) M^{-1}$$

et nous avons évidemment :

$$a'\, dx' + b'\, dy' = a\, dx + b\, dy.$$

Mais en remarquant que

$$b' = b\, A^{-1} \qquad \text{et} \qquad dx' = A\, dx,$$

nous avons aussi

$$b'\, dx' = b\, dx.$$

Il en résulte qu'à tout covecteur

$$\omega = (a, b) \qquad \text{ou} \qquad a_\alpha\, dx^\alpha + b_\alpha\, dy^\alpha$$

correspond un autre covecteur noté $\dot\omega$ tel que :

$$\dot\omega = (b, 0) \qquad \text{ou} \qquad b_\alpha\, dx^\alpha.$$

En particulier si $f(x, y)$ est une fonction scalaire sur $\mathfrak{V}$, à

$$df = \partial_\alpha f\, dx^\alpha + \partial_{\dot\alpha} f\, dy^\alpha$$

correspond la forme semi-basique :

$$\dot{d}f = \partial_{\dot\alpha} f\, dx^\alpha.$$

3. Définition de $\dot{d}\omega$.

Nous appelons opérateur $\dot{d}$ sur l'anneau des formes de $\mathfrak{V}$ une antidérivation de degré $+1$, anticommutant avec la différentielle extérieure d et qui pour les fonctions scalaires se réduit à l'opérateur $\dot{d}$ défini précédemment.

Nous avons les identités de définition:

$$\begin{aligned}
A_1 : \quad & \dot{d}(\omega_1 + \omega_2) = \dot{d}\omega_1 + \dot{d}\omega_2, \\
A_2 : \quad & \dot{d}(\omega_1 \wedge \omega_2) = \dot{d}\omega_1 \wedge \omega_2 + (-1)^{\deg \omega_1} \quad \omega_1 \wedge \dot{d}\omega_2, \\
A_3 : \quad & \dot{d}(d\omega) = -d(\dot{d}\omega).
\end{aligned}$$

L'opérateur $\dot{d}$ étant défini pour les 0-formes, les axiomes précédents le définissent pour une p-forme quelconque. Vérifions le pour une 1-forme.

Toute 1-forme peut s'écrire $\Sigma g\, df$.

D'après A_1 il suffit de définir $\dot{d}(g\, df)$.
D'après A_2: $\dot{d}(g\, df) = \dot{d}g \wedge df + g\, \dot{d}(df)$.
D'après A_3: $\dot{d}(g\, df) = \dot{d}g \wedge df - g\, d(\dot{d}f)$.

Cette dernière expression est parfaitement définie.

Soit x^α, y^α un système de coordonnées locales admissibles du point z de $\mathfrak{V}$; l'opérateur qui à une p-forme ω fait correspondre:

$$dx^\alpha \wedge \partial_{\dot{\alpha}}\omega \qquad \text{où} \qquad \partial_{\dot{\alpha}}\omega = \frac{\partial \omega}{\partial y^\alpha}$$

vérifie les différents axiomes et se réduit à $\dot{d}f$ pour une fonction scalaire.

D'après l'unicité, il résulte que, localement:

$$\dot{d}\omega = dx^\alpha \wedge \partial_{\dot{\alpha}}\omega.$$

Sur cette expression de $\dot{d}\omega$ on vérifie de suite que

$$\dot{d}(\dot{d}\omega) = 0.$$

4. Formes semi-basiques $\dot{d}$ fermées.

L'opérateur $\dot{d}$ est particulièrement intéressant pour les formes semi-basiques; il transforme en effet une p-forme semi-basique en une $(p+1)$-forme également semi-basique.

En vue des applications à la mécanique, considérons en particulier l'anneau des formes semi-basiques à coefficients homogènes par rapport aux y^α, formes dites *restreintes*.

Nous dirons pour simplifier qu'une p-forme ω est $\dot{h}(k)$ si elle est semi-basique et si ses coefficients sont homogènes de degré k par rapport aux y^α.

Dans ces conditions $\dot{d}\omega$ est une $(p+1)$-forme $\dot{h}(k-1)$. Il en résulte que la somme $p+k$ est invariante pour l'opérateur $\dot{d}$.

Si

$$p + k \neq 0 \qquad \text{et si} \qquad \dot{d}\omega = 0,$$

on vérifie facilement que :

$$\omega = \dot{d}\,\frac{i(y)\omega}{p+k}$$

où $i(y)\omega$ a pour expression locale :

$$y^\alpha \frac{\partial\omega}{\partial(dx^\alpha)}.$$

Si

$$p + k = 0 \qquad \text{et si} \qquad \dot{d}\omega = 0,$$

on montre que, au moins localement, ω est la $\dot{d}$-différentielle d'une p-1 forme $\dot{h}(1\text{-}p)$; c'est ce que nous allons faire dans la suite sur un cas particulier.

5. Formes régulières définies sur W.

Une forme est dite *définie sur* W si son image sur $\mathcal{V}$ est invariante pour le changement de y en λy, λ étant une fonction scalaire arbitraire.

Soit par exemple une 2-forme Ω d'expression locale

$$\Omega = \omega_1 + \omega_2 + \omega_3$$

avec

$$\omega_1 = \frac{1}{2}\, a_{\alpha\beta}\, dy^\alpha \wedge dy^\beta$$

$$\omega_2 = b_{\alpha\beta}\, dy^\alpha \wedge dx^\beta$$

$$\omega_3 = \frac{1}{2}\, c_{\alpha\beta}\, dx^\alpha \wedge dx^\beta.$$

Pour que Ω soit définie sur W, il faut et il suffit que les $a_{\alpha\beta}$ soient $\dot{h}(-2)$, les $b_{\alpha\beta}\,\dot{h}(-1)$, les $c_{\alpha\beta}\,\dot{h}(0)$ et qu'ils vérifient les identités

$$a_{\alpha\beta}y^{\alpha} = 0 \qquad \text{et} \qquad b_{\alpha\beta}y^{\alpha} = 0.$$

A cause de ces relations Ω ne peut être de rang $2n+2$. Nous dirons que Ω est une forme ***régulière***, si elle est de rang $2n$.

Par abus de langage nous appellerons *trajectoires de* Ω les solutions du système associé de Ω :

$$\frac{\partial\Omega}{\partial(dy^{\alpha})} = 0, \qquad \frac{\partial\Omega}{\partial(dx^{\alpha})} = 0.$$

Soit maintenant un chemin (C) de la base V :

$$x^{\alpha} = x^{\alpha}(u).$$

Ce chemin se relève en un chemin sur $\mathcal{V}$ dépendant du paramétrage; mais tous les chemins de $\mathcal{V}$ obtenus à partir de (C) par changements de paramètre ont même projection sur W; cette projection est par définition la relevée sur W du chemin (C) et sera désignée par chemin *semi-basique* de W.

On peut se poser le problème : quelles conditions faut-il imposer à une 2-forme Ω définie sur W pour que ses trajectoires possèdent les propriétés suivantes :

1) Par un point de W passe une trajectoire et une seule.

2) Toutes les trajectoires sont semi-basiques ?

La réponse est : Ω doit se réduire à $\omega_2 + \omega_3$; Ω doit être régulière, le rang de $b_{\alpha\beta}$ étant n; les $b_{\alpha\beta}$ doivent être les composantes d'un tenseur semi-basique symétrique. Nous ne démontrerons pas ce théorème ici.

6. Étude d'une 2-forme $\dot{d}$ fermée.

Explicitons

$$\dot{d}\Omega = 0$$

ou, avec les notations du paragraphe précédent, les conditions équivalentes :

$$\dot{d}\omega_1 = \dot{d}\omega_2 = \dot{d}\omega_3 = 0.$$

1° $\dot{d}\omega_1 = 0$ ou $\dot{\partial}_{\gamma}a_{\alpha\beta} = 0$.

Il en résulte que :

$$\dot{\partial}_{\gamma} a_{\alpha\beta} y^{\gamma} = -2 a_{\alpha\beta} = 0,$$

c'est-à-dire que $\omega_1 = 0$.

Faisons maintenant le changement de carte admissible, défini par :

$$x^{\alpha} \to x^{\alpha'} \qquad \text{et posons} \qquad A^{\alpha}_{\lambda'} = \partial_{\lambda'} x^{\alpha}.$$

Nous voyons que la propriété $\omega_1 = 0$ se conserve et que les $b_{\alpha\beta}$ se transforment selon la loi :

$$b_{\lambda'\mu'} = A^{\alpha}_{\lambda'} A^{\beta}_{\mu'} b_{\alpha\beta}.$$

Les $b_{\alpha\beta}$ sont donc les composantes d'un tenseur semi-basique.

2° $\dot{d}\omega_2 = 0$ ou

$$\dot{\partial}_{\gamma} b_{\alpha\beta} - \dot{\partial}_{\beta} b_{\alpha\gamma} = 0.$$

Ces conditions expriment que les 1-formes covectorielles $b_{\alpha\beta}\, dx^{\beta}$ sont $\dot{d}$ fermées.

En intégrant par rapport aux variables y on peut trouver $n + 1$ fonctions B_{α} telles que

$$b_{\alpha\beta} = \dot{\partial}_{\beta} B_{\alpha} \qquad \text{ou} \qquad b_{\alpha\beta}\, dx^{\beta} = \dot{d}(B_{\alpha}).$$

Sur l'intersection des domaines des 2 cartes admissibles x^{α} et $x^{\alpha'}$ nous avons :

$$b_{\lambda'\mu'} = A^{\beta}_{\mu'} \dot{\partial}_{\beta}(A^{\alpha}_{\lambda'} B_{\alpha}) = \dot{\partial}_{\mu'} B_{\lambda'}$$

en posant $$B_{\lambda'} = A^{\alpha}_{\lambda'} B_{\alpha}.$$

Il en résulte que des B_{α} sont les composantes d'un covecteur semi-basique que l'on peut définir par prolongement sur toute la variété $\mathfrak{V}$.

Donc

$$L = B_{\alpha} y^{\alpha}$$

est une fonction scalaire définie sur $\mathfrak{V}$.

Exprimons $b_{\alpha\beta}$ en fonction de L. Nous avons :

$$\dot{\partial}_{\alpha} L = B_{\alpha} + \dot{\partial}_{\alpha} B_{\beta} y^{\beta} = B_{\alpha} + b_{\beta\alpha} y^{\beta};$$

comme

$$b_{\beta\alpha} y^{\beta} = 0, \qquad \dot{\partial}_{\alpha} L = B_{\alpha} \qquad \text{et} \qquad b_{\alpha\beta} = \dot{\partial}_{\beta} B_{\alpha} = \dot{\partial}_{\alpha\beta} L.$$

Le tenseur $b_{\alpha\beta}$ est donc symétrique.

Comme $$b_{\alpha\beta}y^\beta = \partial_{\dot\beta}B_\alpha y^\beta = 0,$$

les B_α sont $\dot h(0)$ et L $\dot h(1)$.

Nous pouvons alors mettre ω_2 sous la forme :

$$\omega_2 = \partial_{\dot\alpha\dot\beta}L\, dy^\alpha \wedge dx^\beta = \dot d(-\partial_{\dot\alpha}L\, dy^\alpha).$$

3° $\dot d\omega_3 = 0$ entraîne que

$$\omega_3 = \dot dC \qquad \text{avec} \qquad C = \frac{1}{2}\, c_{\alpha\beta}y^\alpha dx^\beta.$$

Finalement nous pouvons écrire :

$$\Omega = \dot d(-\partial_{\dot\alpha}L\, dy^\alpha + C) = \dot d(-dL + \partial_\alpha L\, dx^\alpha + C) = d(\dot dL) + S$$

avec $$S = \frac{1}{2}\, S_{\alpha\beta}\, dx^\alpha \wedge dx^\beta = \dot d(\partial_\alpha L\, dx^\alpha + C).$$

Posons

$$X_\alpha = S_{\alpha\beta}y^\beta.$$

On obtient alors :

$$S = \dot d\left(-\frac{1}{2}\, X_\alpha\, dx^\alpha\right).$$

Nous pouvons donc énoncer le

Théorème. — *Soit une 2-forme définie sur* W *d'image* Ω *sur* $\mathcal{V}$.

Pour que Ω *puisse se mettre sous la forme :*

$$\Omega = d(\dot dL) + S$$

où L *est une fonction scalaire de* $\mathcal{V}$ $\dot h1$ *et* S *une 2-forme semi-basique,* $\dot d$ *fermée, il faut et il suffit que :*

$$\dot d\Omega = 0.$$

Si Ω est régulière (c'est-à-dire si le rang de la matrice ayant pour éléments $\partial_{\dot\alpha\dot\beta}L$ est n) nous dirons que Ω définit sur W une *structure de système dynamique abstrait.* Les trajectoires de Ω sont alors des chemins semi-basiques de W se projettant sur la base V suivant les solutions du système :

$$\frac{d}{du}\,\partial_{\dot\alpha}L - \partial_\alpha L = S_{\alpha\beta}y^\beta = X_\alpha$$

où $$y^\alpha = \frac{dx^\alpha}{du}.$$

7. Transformation de jauge.

En reprenant les calculs précédents on voit que le covecteur $B_\alpha \overset{*}{h}(0)$ n'est défini qu'à un covecteur basique A près; autrement dit Ω ne change pas si on remplace B_α par $B_\alpha + A_\alpha(x)$, L par $L + A_\alpha y^\alpha$ et S par $S - d(A_\alpha\, dx^\alpha)$.

Les trajectoires du système Σ sont solutions du système associé de Ω. Elles ne seront pas modifiées en remplaçant Ω par $f\Omega$ où $f(x,y)$ est une fonction scalaire arbitraire $\overset{*}{h}0$. Comme Ω est $\dot{d}$ fermée, pour que $f\Omega$ le soit, il faut et il suffit que :

$$\dot{d}f \wedge \Omega = 0,$$

ce qui d'après la régularité de Ω entraîne

$$\dot{d}f = 0,$$

f est donc une fonction arbitraire de x seulement.

Nous dirons que Ω et $f(x)\Omega$ définissent le même système dynamique. Il en résulte que l'on peut faire subir au couple (L, S) d'un lagrangien et d'un tenseur force la transformation dite *transformation de jauge* :

$$\begin{aligned} L &\to fL + A_\alpha y^\alpha \\ S &\to fS - df \wedge \dot{d}L - d(A_\alpha\, dx^\alpha). \end{aligned}$$

Une telle transformation qui conserve les équations du mouvement dépend donc d'une fonction arbitraire f et d'un covecteur arbitraire A définis sur l'espace temps de configuration V.

8. Systèmes dynamiques conservatifs.

Le système dynamique Σ est dit *conservatif* si la classe des formes $f\Omega$ qui le définissent contient une *forme fermée.*

Il en est évidemment ainsi si l'on peut mettre S sous la forme :

$$S = \frac{1}{f}\,(df \wedge \dot{d}L + d(A_\alpha dx^\alpha)).$$

Dans ce cas :

$$\tilde{\Omega} = f\Omega = d(\dot{d}\mathcal{L})$$

avec
$$\mathfrak{L} = f\mathrm{L} + \mathrm{A}_\alpha y^\alpha.$$
On démontre que ceci est le cas général, c'est-à-dire que la condition nécessaire et suffisante pour que
$$\Omega = d(\dot{d}\mathrm{L}) + \mathrm{S}$$
admette un facteur intégrant est que S puisse se mettre sous la forme précédente.

Nous désignerons dans la suite par 2-forme fondamentale d'un système dynamique conservatif une 2-forme Ω telle que :
$$\begin{cases} \dot{d}\Omega = 0, \\ d\Omega = 0. \end{cases}$$
Il existe alors une fonction scalaire L, le lagrangien du système, telle que
$$\Omega = d(\dot{d}\mathrm{L}).$$
Les transformations de jauge se réduisent ici à
$$\mathrm{L} \to k\mathrm{L} + \partial_\alpha f y^\alpha$$
k étant une constante arbitraire et f une fonction scalaire arbitraire des x^α.

9. Propriétés d'un système dynamique abstrait non conservatif.

Soit
$$\Omega = d(\dot{d}\mathrm{L}) + \mathrm{S}$$
une 2-forme d'un système dynamique Σ.

1) Les trajectoires de Σ sont par définition celles de Ω. Ce sont des chemins semi-basiques de W se projettant sur la base suivant les solutions du système des équations de Lagrange :
$$\frac{d}{du}\partial_{\dot{\alpha}}\mathrm{L} - \partial_\alpha \mathrm{L} = \mathrm{S}_{\alpha\beta}\dot{x}^\beta = \mathrm{X}_\alpha.$$

2) Théorème de Lichnerowicz.

La forme Ω définit une relation intégrale d'invariance [2] : si T est une 2-chaîne quelconque de W engendrée par des trajectoires
$$\int_\mathrm{T} \Omega = 0.$$

Si T est un « tube de trajectoires » c'est-à-dire une 2-chaîne ayant pour bord $C_0 - C_1$ où C_0 et C_1 sont deux 1-cycles homotopes, coupant transversalement les trajectoires, nous avons

$$\int_{C_1} \dot{d}L - \int_{C_0} \dot{d}L = \int_T S.$$

Le 1[er] membre s'interprète comme la différence des circulations du covecteur vitesse : $\partial_{\dot{\alpha}}L$, le 2[e] membre comme flux du tenseur force.

3) Les trajectoires sur V sont les S-extrémales de Ω [1].

4) Formalisme canonique :

Posons

$$l_\alpha = \partial_{\dot{\alpha}}L.$$

L'élimination des y^α entre ces $n+1$ relations donne une relation de la forme :

$$H(x, l) = 0.$$

Cette équation définit une sous-variété W^* de l'espace fibré V^* des covecteurs tangents à V, appelé *espace des phases-temps.*

Les trajectoires de

$$\Omega = dl_\alpha \wedge dx^\alpha + \frac{1}{2} S_{\alpha\beta}\, dx^\alpha \wedge dx^\beta$$

sur W^* sont les solutions d'un système différentiel qui peut prendre la forme matricielle

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{l} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & I \\ -I & S \end{pmatrix} \begin{pmatrix} H_x \\ H_l \end{pmatrix}$$

le 1[er] membre est la colonne des dérivées des x^α, l_α par rapport à un paramètre convenable, 0, I les matrices nulle et unité, d'ordre $n+1$, S la matrice des $S_{\alpha\beta}$; la colonne des H_x, H_l est celle des dérivées partielles de H par rapport aux x^α, l_α.

L'expression de H est largement arbitraire; mettre H sous la forme

$$H = l_\lambda + K(x, l) = 0$$

où K ne contient plus l_λ, revient à prendre x^λ comme variable indépendante.

10. Propriétés d'un système dynamique abstrait conservatif.

Soit $\Omega = d(\dot{d}\mathrm{L})$ la 2-forme d'un tel système Σ.

1) Les trajectoires de Σ sur V sont définies par les équations :

$$\frac{d}{du}\,\partial_{\dot{\alpha}}\mathrm{L} - \partial_{\alpha}\mathrm{L} = 0.$$

2) Théorème de Cartan-Whittaker.

Ω définit un invariant intégral absolu et $\omega = \dot{d}\mathrm{L}$ un invariant intégral relatif pour les trajectoires de Σ. Avec les notations du paragraphe précédent on a :

$$\int_{\mathrm{C}_1} \dot{d}\mathrm{L} = \int_{\mathrm{C}_0} \dot{d}\mathrm{L}.$$

3) Les trajectoires sur V sont les extrémales de

$$\int \mathrm{L}\, du \quad \text{(Hamilton)}.$$

4) Formalisme canonique.

Les trajectoires sur W* sont solutions du système :

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{l} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \mathrm{I} \\ -\mathrm{I} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathrm{H}_x \\ \mathrm{H}_l \end{pmatrix}.$$

11. Les systèmes dynamiques abstraits ont donc les mêmes propriétés que les systèmes dynamiques de la mécanique classique ou relativiste.

Mais pour ces derniers les lagrangiens vérifient certaines conditions que nous n'imposons pas ici.

L'étude de la forme Ω a mis en évidence d'autre part le tenseur force $\mathrm{S}_{\alpha\beta}$; ce tenseur qui ne paraît pas encore s'imposer en mécanique classique, paraît, d'après des travaux récents, jouer un rôle important en relativité; il se réduit au tenseur champ électromagnétique pour certains schémas et permet de définir dans les cas les plus généraux la notion de tenseur tourbillon.

BIBLIOGRAPHIE

[1] J. Klein, Espaces Variationnels et Mécanique. *Annales de l'Institut Fourier*, tome XII, 1962.

[2] A. Lichnerowicz, Les relations intégrales d'invariance. *Bulletin des Sc. Math.*, tome LXX, 1946.