Ann. Inst. Fourier, Grenoble
10 (1960), 333-344.

LE THÉORÈME DE REPRÉSENTATION INTÉGRALE DANS LES ENSEMBLES CONVEXES COMPACTS

par **Gustave CHOQUET** (Paris).

Dans un travail antérieur (1), nous avons démontré le théorème suivant :

Soit $\mathcal{V}$ un espace vectoriel séparé localement convexe, $\mathcal{B}$ une partie convexe compacte de $\mathcal{V}$, et $\mathcal{E}$ l'ensemble des points extrémaux de $\mathcal{B}$. Alors si $\mathcal{B}$ est métrisable, $\mathcal{E}$ est un G_δ de $\mathcal{B}$, et tout point de $\mathcal{B}$ est barycentre d'au moins une mesure de Radon positive portée par $\mathcal{E}$.

Récemment (2) Errett Bishop et Karel de Leeuw, en utilisant une idée nouvelle fort intéressante, ont pu simplifier notre démonstration et étendre le théorème, sous une forme atténuée, au cas où $\mathcal{B}$ n'est pas métrisable :

Tout point de $\mathcal{B}$ est alors barycentre d'une mesure de Radon positive sur $\mathcal{B}$, pseudo-portée par $\mathcal{E}$ en ce sens qu'elle ne charge aucun compact de Baire ([1]) disjoint de $\mathcal{E}$; et il existe des cas où l'expression « pseudo-portée » ne peut être remplacée par « portée ».

L'utilisation fréquente, en analyse, du théorème de représentation intégrale, en rend souhaitable pour l'enseignement une démonstration simple. Nous allons ici reprendre la méthode de Bishop et de Leeuw; nous la simplifierons, notamment en supposant dès le départ que $\mathcal{B}$ est métrisable; d'autre part nous n'utiliserons pas comme eux l'inégalité de Schwartz;

([1]) Un compact de Baire dans $\mathcal{B}$ est un compact de $\mathcal{B}$ qui a, dans $\mathcal{B}$, une base dénombrable de voisinages, autrement dit qui est un G_δ.

pour cela nous remplacerons leurs fonctions f^2 (où f est linéaire) par des fonctions convexes quelconques, plus maniables.

Dans une seconde et dans une troisième partie, nous reviendrons sur quelques points de leur travail pour en préciser la portée; cet examen nous amènera à poser quelques problèmes.

I. — LE THÉORÈME DE REPRÉSENTATION INTÉGRALE

Les outils que nous utiliseront sont :

1) Lemme de Zorn sur les ensembles ordonnés inductifs.

2) Théorème élémentaire des sections ([2]) : Soit E topologique séparé et réunion dénombrable de compacts métrisables, et soit f une application continue de E sur F topologique séparé; alors il existe une application g de 1re classe ([3]) de F dans E telle que $f \circ g =$ identité.

3) Intégration des mesures : Soient A et B deux espaces compacts, et φ une application faiblement continue de A dans l'espace $\mathcal{M}^+(B)$ des mesures de Radon positives sur B. Nous supposons connue la définition et les propriétés élémentaires de $\int \varphi d\mu$, où μ est une mesure de Radon positive sur A.

Notations. — $\mathcal{V}$, espace vectoriel topologique (sur R), séparé et localement convexe.

$\mathcal{B}$, partie convexe compacte de $\mathcal{V}$.

$\mathcal{E}$, ensemble des points extrémaux de $\mathcal{B}$.

$\mathcal{M}^+$ (resp. $\mathcal{M}^1$), l'ensemble des mesures de Radon positives sur $\mathcal{B}$ (resp. positives et de norme 1).

$\mathcal{A}$, ensemble des fonctions affines continues sur $\mathcal{V}$ (linéaires + C^{te}).

([2]) En vue de l'enseignement, en voici une démonstration simple.

L'ensemble triadique de Cantor A est homéomorphe à $\{0,1\}^{\aleph_0}$, donc aussi à $(\{0,1\}^{\aleph_0})^{\aleph_0}$; donc A est homéomorphe à $A^{\aleph_0}$. Comme [0,1] est image continue de A, il en est alors de même de $[0,1]^{\aleph_0}$. Comme tout espace compact métrisable est plongeable dans $[0,1]^{\aleph_0}$ un tel espace est image continue d'une partie fermée de A.

Il en résulte aussitôt que l'espace E de l'énoncé est image continue d'un fermé de R^+ : $E = \varphi(B)$ avec φ continue et B fermé $\subset R^+$.

Posons $h = f \circ \varphi$ et, pour tout $x \in F$, posons $k(x) = inf. \, ((h^{-1}(x))$; l'application k de F dans R^+ est semi-continue inférieurement, donc de 1re classe. L'application $g = \varphi \circ k$ de F dans E est la section cherchée.

([3]) C'est-à-dire que $g^{-1}(\omega)$ est un F_σ pour tout ouvert ω de E.

$\mathcal{C}$, ensemble des fonctions convexes continues et positives sur $\mathcal{B}$.

Nous noterons partout par $X \setminus Y$ l'ensemble $X \cap \complement Y$.

Relation d'ordre sur $\mathcal{M}^+$.

Soient $\mu_1, \mu_2 \in \mathcal{M}^+$; on dira que μ_2 majore μ_1, ce qui se notera $\mu_1 \prec \mu_2$, si :

1) $\int f d\mu_1 = \int f d\mu_2$ pour toute $f \in \mathcal{A}$

(Cette condition revient à dire que μ_1 et μ_2 ont même masse totale et même barycentre.)

2) $\int f d\mu_1 \leqslant \int f d\mu_2$ pour toute $f \in \mathcal{C}$.

La reflexivité et la transitivité de la relation sont évidentes; d'autre part si $\mu_1 \prec \mu_2$ et $\mu_2 \prec \mu_1$, on a :

$\int f d\mu_1 = \int f d\mu_2$ pour toute $f \in \mathcal{C}$ d'où [4] $\mu_1 = \mu_2$.

Donc cette relation est bien une relation d'ordre.

Lemme 1. — *L'ensemble $\mathcal{M}^+$ ainsi ordonné est inductif.*

En effet, soit X une partie totalement ordonnée de $\mathcal{M}^+$; toutes les $\mu \in X$ ont même masse totale, donc X est relativement compact. Soit μ_0 une valeur d'adhérence de X suivant le filtre des sections finissantes de X.

Évidemment $\int f d\mu = \int f d\mu_0$ pour toute $f \in \mathcal{A}$ et toute $\mu \in X$.

D'autre part, pour toute $f \in \mathcal{C}$, les $\int f d\mu$ convergent en croissant vers $\int f d\mu_0$, d'où :

$$\int f d\mu \leqslant \int f d\mu_0 \text{ pour toute } f \in \mathcal{C} \text{ et toute } \mu \in X.$$

Donc μ_0 majore bien X. La démonstration montre en outre l'*unicité* de μ_0.

Du lemme 1 et du lemme de Zorn résulte aussitôt l'énoncé suivant :

Corollaire 1. — *Toute $\nu \in \mathcal{M}^+$ est majorée par une mesure maximale.*

Ce corollaire s'applique en particulier aux mesures ponctuelles ε_x (où $x \in \mathcal{B}$), d'où :

[4] $\mathcal{A}$ sépare les points de $\mathcal{B}$ donc (Stone-Weierstrass) les polynômes par rapport aux éléments de $\mathcal{A}$ forment un ensemble total dans $C(\mathcal{B})$; or un tel polynôme est différence de deux fonctions convexes positives; donc $\mathcal{C}$ est total dans $C(\mathcal{B})$, d'où la propriété.

Corollaire 2. — *Tout point x de $\mathcal{B}$ est barycentre d'une mesure positive maximale de masse totale* 1.

Lemme 2. — *La relation $\prec$ sur $\mathcal{M}^+$ est compatible avec l'addition.*

C'est évident pour l'addition d'un nombre fini de mesures. On en déduit plus généralement que :

$$(\nu_a \prec \nu'_a \text{ pour tout } a \in \mathrm{K}) \Longrightarrow \left(\int \nu(a)d\pi_a \prec \int \nu'(a)d\pi_a\right),$$

où $a \to \nu(a)$ et $a \to \nu'(a)$ sont des applications continues (ce qui suffira ici) d'un espace compact K dans $\mathcal{M}^+$, et où π est une mesure positive sur K.

Lemme 3. — *Soient μ et $\nu \in \mathcal{M}^+$, avec $\mu \leqslant \nu$. Si ν est maximale, μ l'est aussi.*

En effet, posons $\nu = \mu + \pi$. S'il existait $\mu' \neq \mu$ tel que $\mu \prec \mu'$, on aurait $\nu \neq \mu' + \pi$ et $\nu \prec \mu' + \pi$, donc ν ne serait pas maximale.

Lemme 4. — *Pour tout $x \in \mathcal{B}$ et toute $\mu \in \mathcal{M}^1$ de barycentre x, on a : $\varepsilon_x \prec \mu$.*

On sait déjà que $\int f d\varepsilon_x = \int f d\mu$ pour toute $f \in$ A. D'autre part on a :

$\int f d\varepsilon_x \leqslant \int f d\mu$ pour toute f convexe et continue, car cette inégalité s'écrit $f(x) \leqslant \int f d\mu$; elle est évidente si μ est discrète; le cas général s'en déduit par continuité, puisque toute $\mu \in \mathcal{M}^1$ est limite faible de mesures discrètes de $\mathcal{M}^1$ ayant même barycentre.

Lemme 5. — *Lorsque $\mathcal{B}$ est métrisable, $\mathcal{E}$ est un G_δ et toute mesure maximale de $\mathcal{M}^+$ est portée par $\mathcal{E}$.*

Démonstration. — 1) Soit Δ la diagonale de $\mathcal{B} \times \mathcal{B}$, et soit φ l'application $(x_1, x_2) \to (x_1 + x_2)/2$, de $\mathcal{B} \times \mathcal{B}$ dans $\mathcal{B}$.

Comme $\mathcal{B}$ est métrisable, $(\mathcal{B}^2 \setminus \Delta)$ est un K_σ ; donc $\varphi(\mathcal{B}^2 \setminus \Delta)$ est aussi un K_σ ; or ce n'est autre que l'ensemble des points non extrémaux de $\mathcal{B}$. Son complémentaire $\mathcal{E}$ est donc un G_δ.

2) Soit ψ_0 un relèvement de 1re classe de l'application φ de $(\mathcal{B}^2 \setminus \Delta)$ sur $(\mathcal{B} \setminus \Delta)$ (théorème des sections rappelé au début).

L'application h : $(x_1, x_2) \to (\varepsilon_{x_1} + \varepsilon_{x_2})/2$ de $\mathcal{B}^2$ dans $\mathcal{M}^1$ est une homéomorphie; donc $\psi = h \circ \psi_0$ est une application de 1re classe de $(\mathcal{B} \setminus \mathcal{E})$ dans $\mathcal{M}^1$ telle que pour tout $x \in (\mathcal{B} \setminus \mathcal{E})$ on ait :

$$\psi(x) \neq \varepsilon_x \qquad \text{et} \qquad x = (\text{barycentre de } \psi(x))$$

3) Soit $\mu \in \mathcal{M}^1$, où μ n'est pas portée par $\mathcal{E}$; on va montrer que μ n'est pas maximale. Il suffira de montrer pour cela qu'il existe une $\nu \leqslant \mu$ qui n'est pas maximale (lemme 3).

Comme $\mathcal{E}$ est μ-mesurable il existe (théorème de Lusin) un compact K de $(\mathcal{B} \setminus \mathcal{E})$ tel que $\mu(K) \neq 0$ et tel que la restriction de ψ à K soit continue.

Désignons par ν la partie de μ portée par K. Pour toute $f \in \mathcal{C}$ et tout $a \in K$, on sait (lemme 4) que

$$\int f\, d\varepsilon_a \leqslant \int f\, d\psi(a).$$

Soit x_0 un point du *support fermé de* ν; comme $\psi(x_0) \neq \varepsilon_{x_0}$, il existe une $f_0 \in \mathcal{C}$ pour laquelle

$$\int f_0\, d\varepsilon_a < \int f_0\, d\psi(a) \qquad \text{pour} \qquad a = x_0.$$

Comme les deux membres sont des fonctions continues de a sur K, on a la même inégalité stricte pour tout point a de K assez voisin de x_0; on a donc :

$$\int \left(\int f_0\, d\varepsilon_a \right) d\nu_a < \int \left(\int f_0\, d\psi(a) \right) d\nu_a$$

ou encore

$$\int f_0\, d\nu < \int f_0\, d\nu' \qquad \text{où} \qquad \nu' = \int \psi(a)\, d\nu_a.$$

On a donc $\nu \neq \nu'$; et comme $\nu \prec \nu'$ (lemme 2), ν n'est pas maximale.

THÉORÈME. — *Soit $\mathcal{B}$ convexe compact métrisable dans $\mathcal{V}$ (e.v.t. séparé loc. convexe).*

L'ensemble $\mathcal{E}$ des points extrémaux de $\mathcal{B}$ est un G_δ et tout point de $\mathcal{B}$ est barycentre d'au moins une mesure de Radon $\geqslant 0$ portée par $\mathcal{E}$.

Ce théorème est la conséquence immédiate du lemme 5 et du corollaire 2 du lemme 1.

Quelques propriétés des éléments maximaux de $\mathcal{M}^1$.

1) Le corollaire 1 du lemme 1 montre que toute $\mu \in \mathcal{M}^1$ est majorée par une mesure maximale; nous allons préciser cet énoncé *lorsque $\mathcal{B}$ est métrisable* (donc aussi $\mathcal{M}^1$).

Soient X_1, X_2 deux espaces identiques à $\mathcal{M}^1$, et soit Δ la diagonale de $X_1 \times X_2$. Dans ce produit, l'ensemble A des couples (μ_1, μ_2) tels que $\mu_1 \prec \mu_2$ est évidemment fermé; la projection de $(A \setminus \Delta)$ sur X_1 n'est autre que l'ensemble des μ non maximales de $\mathcal{M}^1$; cet ensemble est donc un K_σ; autrement dit l'*ensemble des éléments maximaux de* $\mathcal{M}^1$ *est un* G_δ (même résultat dans $\mathcal{M}^+$).

Il en résulte que dans $X_1 \times X_2$, l'ensemble B des (μ_1, μ_2) de A avec μ_2 extrémale est un G_δ; or d'après le corollaire 1 du lemme 1, la projection de B dans X_1 est X_1; on peut donc relever cette projection en une application « analytique » (5) (donc universellement mesurable) $\mu \to \varphi(\mu)$ de $\mathcal{M}^1$ dans lui-même telle que pour toute μ on ait

$$\mu \prec \varphi(\mu), \qquad \text{avec} \qquad \varphi(\mu) \text{ maximale.}$$

2) Supposons encore $\mathcal{B}$ métrisable; soit f une application universellement mesurable de $\mathcal{B}$ dans $\mathcal{M}^1$ telle que, pour tout $x \in \mathcal{B}$, $f(x)$ ait pour barycentre x.

Soit T l'application de $\mathcal{M}^1$ dans lui-même définie par :

$$\mu \to \int f(x)\, d\mu_x$$

On dit que T est la *diffusion* associée à f; on a évidemment $\mu \prec T_\mu$.

Si en outre $f(x) \neq \varepsilon_x$ pour tout $x \notin \mathcal{E}$, le même raisonnement que celui du lemme 5 montre que :

$$(\mu = T_\mu) \iff (\mu \text{ est portée par } \mathcal{E})$$

Or soit $\mu \in \mathcal{M}^+$; la suite $\mu_x = T^n_{\mu_0}$ est croissante pour la relation $\prec$ et converge vers une mesure μ_ω. Des exemples simples (6) montrent que l'on peut avoir $\mu_\omega \neq T_{\mu_\omega}$.

On définit alors μ_α par récurrence transfinie pour tout ordinal α de 2e classe par les conditions :

$$\mu_{\alpha+1} = T_{\mu_\alpha} \quad \text{et} \quad \mu_\beta = \lim \mu_{\beta_n} \text{ si } \beta = \text{limite croissante des } \beta_n.$$

Comme $\mathcal{B}$ est métrisable, il existe une partie dénombrable de $\mathcal{C}$ qui est totale dans $C(\mathcal{B})$; il en résulte que toute partie

(5) Une application f de E dans F est dite ici « analytique » si pour tout ouvert ω de F, $f^{-1}(\omega)$ appartient au corps borelien engendré par les ensembles analytiques de E.

(6) Prendre $\mathcal{B} = [0,2]$ et T telle que : Support de $T\varepsilon_x \subset]0,1[$ pour tout $x \in]0,1[$.

totalement ordonnée de $\mathcal{M}^1$ (pour l'ordre $\prec$) est cofinale à une suite dénombrable. En particulier *il existe un ordinal* α *de* 2^e^ *classe tel que* $\mu_\alpha = \mathrm{T}_{\mu_\alpha}$, *c'est-à-dire tel que* μ_α *soit portée par* $\mathcal{E}$ Cet α dépend en général de μ_0.

Problèmes.

1) Supposons $\mathcal{B}$ métrisable. Est-ce que $(\mu_1 \prec \mu_2)$ entraine que μ_2 soit l'image de μ_1 par une diffusion du type défini plus haut?

2) Supposons $\mathcal{B}$ métrisable. Est-ce que toute μ positive portée par $\mathcal{E}$ est maximale? (On se ramène aisément à ceci : Montrer que si μ_1 et μ_2 sont étrangères et portées par $\mathcal{E}$, $(\mu_1 \prec \mu_2)$ entraîne $(\mu_1 = \mu_2)$).

3) Soit $\mathcal{B}$ quelconque. Est-ce que la somme de deux mesures maximales l'est aussi? Plus généralement est-ce qu'une intégrale $\int \mu(a)\, d\nu_a$ de mesures $\mu(a)$ maximales est maximale? (si $\nu \geqslant 0$).

Les relations entre ces trois problèmes sont évidentes.

II. — SUR L'ESPACE DUAL D'UN ESPACE VECTORIEL DE FONCTIONS CONTINUES SUR UN COMPACT

Le point de départ de Bishop et de Leeuw est l'étude du dual d'un espace vectoriel de fonctions continues sur un espace X compact. Nous allons montrer, plus explicitement qu'ils ne le font, l'équivalence entre cette étude et celle des ensembles convexes compacts.

Soit X un espace compact; soit $C_r(X)$ l'espace vectoriel des fonctions numériques réelles continues sur X, muni de la topologie de la convergence uniforme; soit $\mathcal{M}(X)$ son dual, muni de la topologie faible.

Soit B un sous-espace vectoriel de $C_r(X)$, qui sépare les points de X et contient les constantes; et soit B^* le dual de B, muni de la topologie faible.

Soit φ l'application canonique de $\mathcal{M}(X)$ dans B^*; comme, en vertu du théorème de Hahn-Banach toute forme linéaire continue sur B est la trace d'une forme linéaire continue sur $C_r(X)$, on a $B^* = \varphi(\mathcal{M}(X))$.

On peut évidemment identifier B^* à l'espace-quotient de $\mathcal{M}(X)$ par la relation d'équivalence :

$$(\mu_1 \sim \mu_2) \quad \text{si} \quad \int g\, d\mu_1 = \int g\, d\mu_2 \quad \text{pour toute} \quad g \in B.$$

(notons que $(\mu_1 \sim \mu_2) \Longrightarrow (\mu_1(X) = \mu_2(X))$).

Posons $(B^*)^+ = \varphi(\mathcal{M}^+(X))$ et $(B^*)^1 = \varphi(\mathcal{M}^1(X))$.

Comme $\mathcal{M}^+(X)$ engendre $\mathcal{M}(X)$, $(B^*)^+$ engendre B^*, et $(B^*)^1$ est une base affine compacte du cône convexe $(B^*)^+$.

Soit f l'application $x \to \varepsilon_x$ de X dans $\mathcal{M}(X)$; l'application $\varphi \circ f$ de X dans $(B^*)^1$ est continue, et biunivoque puisque B sépare les points de X; comme X est compact, c'est donc une homéomorphie.

Disons, avec Bishop et de Leeuw, qu'un point x de X est *frontière* si pour toute $\mu \in \mathcal{M}^+(X)$ telle que $\mu \sim \varepsilon_x$ (ce qui entraîne $\mu \in \mathcal{M}^1(X)$), on a : $\mu = \varepsilon_x$.

On désignera par M(B) l'ensemble des points frontière de X et par $\mathcal{E}$ l'ensemble des points extrémaux de $(B^*)^+$.

Théorème. — *On a* : $f(M(B)) = \mathcal{M}^+ \cap \varphi^{-1}(\mathcal{E})$.

Autrement dit, les mesures positives μ sur X, dont l'image $\varphi(\mu)$ est extrémale dans $(B^*)^1$ sont les mesures ε_x, où x est frontière. En effet :

a) $(\mu \in \mathcal{M}^+$ et $\varphi(\mu) \in \mathcal{E}) \Longrightarrow (\mu = \varepsilon_x$ où x est frontière).

D'abord μ est dans $\mathcal{M}^1(X)$; puis l'image μ' de μ par l'homéomorphie $f \circ \varphi$ de X sur $f \circ \varphi(X)$ est une mesure positive sur $(B^*)^+$, de barycentre $\varphi(\mu)$; or $\varphi(\mu)$ est extrémale, donc μ' a un support ponctuel; les supports de μ et μ' sont homéomorphes, donc μ est de la forme ε_x. Ce point x est frontière, sinon il existerait une seconde mesure $\nu \geqslant 0$, elle aussi de la forme ε_y, telle que $\varphi(\varepsilon_x) = \varphi(\varepsilon_y)$; on aurait alors $\varphi\left(\frac{\varepsilon_x + \varepsilon_y}{2}\right) \in \mathcal{E}$, ce qui est impossible d'après ce qu'on vient de voir.

b) Inversement, soit x un point frontière; je dis que $\varphi(\varepsilon_x) \in \mathcal{E}$. Sinon $\varphi(\varepsilon_x)$ serait milieu de deux points distincts de $(B^*)^1$, donc $\varphi(\varepsilon_x) = \varphi(\mu)$ où $\mu \in \mathcal{M}^1(X)$ et $\mu \neq \varepsilon_x$; or ceci est exclus puisque x est frontière.

Conséquence. — L'application $f \circ \varphi$ plonge homéomorphiquement X dans le convexe compact $(B^*)^1$ et transforme M(B) en $\mathcal{E}$.

On se pose alors le problème suivant :

α) *Pour toute* $\mu \in \mathcal{M}^1(X)$, *existe-t-il une mesure* $\nu \in \mathcal{M}^1(X)$ *telle que* $\mu \sim \nu$ (*ou encore* $\varphi(\mu) = \varphi(\nu)$) *et telle que* ν *soit portée par* $\overline{M(B)}$, *et par* $M(B)$ *en un sens plus ou moins strict.*

Remarquons que la condition $\varphi(\mu) = \varphi(\nu)$ se traduit par : $\varphi(\mu)$ est barycentre de ν', image de ν par l'homéomorphie $f \circ \varphi$. La réponse au problème α sera donc positive si la réponse au problème β suivant est positive :

β) *Soit* $\mathcal{B}$ *un ensemble convexe compact d'un e.v.t. loc. convexe séparé, et soit* $\mathcal{E}$ *l'ensemble de ses points extrémaux. Est-ce que tout point de* $\mathcal{B}$ *est barycentre d'une mesure positive* ν *de masse totale* 1, *portée par* $\overline{\mathcal{E}}$, *et par* $\mathcal{E}$ *en un sens plus ou moins strict.*

Inversement une réponse positive au problème β entraîne une réponse positive au problème α. En effet, soit B le sous-espace de $C_r(B)$ constitué par les fonctions affines continues; on a ici $\mathcal{E} = M(B)$, donc le problème β apparaît comme un cas particulier du problème α.

III. — ÉTUDE D'UN EXEMPLE

Bishop et de Leeuw démontrent que les problèmes équivalents α et β ont une réponse positive, même si X n'est pas métrisable, à condition de définir l'expression « mesure portée par $\mathcal{E}$ » dans un sens très large, que nous traduirons ici dans le langage des mesures de Radon :

DÉFINITION. — *Soit* X *un espace compact, soit* $A \subset X$, *et soit* μ *une mesure de Radon positive sur* X. *On dit que* μ *est pseudo-portée par* A *si* $\mu(K) = 0$ *pour tout compact* K *de* X *tel que*

1) $A \cap K = \emptyset$; 2) K *est un* G_δ *de* X [7].

Cette condition est plus large encore que la condition $\mu_*(\complement A) = 0$; elle est même compatible avec la relation $\mu^*(A) = 0$.

On pourrait donc être tenté de croire que le résultat de Bishop et de Leeuw n'est pas le meilleur possible. Nous allons

[7] Si X est tel que tout compact de X soit un G_δ de X, on peut alors affirmer que $\mu_*(\complement A) = 0$.

montrer qu'il n'en est rien, en utilisant un des exemples construits par ces auteurs :

Soit $X = [0,1] \times \{a, b, c\}$; l'ensemble des (t, a) sera désigné par X_a; on définit de même X_b et X_c.

La topologie de X est définie comme la moins fine des topologies telles que :

1) Toute partie de $(X_a \cup X_c)$ est ouverte.

2) Pour toute partie ouverte ω de $[0, 1]$, $\omega \times \{a, b, c\}$ est ouvert dans X.

3) Pour tout $x \in X$, $\{x\}$ est fermé.

On vérifie que X est compact, et que tout compact de $X_a \cup X_c$ est fini.

B est l'ensemble des fonctions numériques continues g sur X telles que, pour tout $t \in [0, 1]$ on ait :

$$g(t_b) = \frac{1}{2}\left[g(t_a) + g(t_c)\right].$$

On vérifie que $M(B) = X_a \cup X_c$, et que les mesures positives pseudo-portées par M(B) sont les mesures qui ne chargent aucun point de X_b; une telle mesure peut donc charger X_b; ce paradoxe apparent résulte de ce que tout compact K de X_b qui est un G_δ de X, est au plus dénombrable.

Il est immédiat que pour toute $\mu \in \mathcal{M}^+(X)$ il existe une mesure *unique* $\nu \geqslant 0$ pseudo-portée par M(B) et telle que $\nu \sim \mu$ (il résulte de là que $(B^*)^1$ est un simplexe); or la mesure de Lebesgue, par exemple, est portée par X_b et pseudo-portée par $M(B) = X_a \cup X_c$. On ne peut donc pas améliorer le résultat de Bishop et de Leeuw malgré la circonstance *a priori* favorable que M(B) est ici ouvert, donc universellement mesurable.

Problèmes.

4) Soit X un espace compact métrisable et $A \subset X$ tel que A soit un G_δ infini de X.

Existe-t-il un sous-espace B de $C_r(X)$ tel que $A = M(B)$ (lorsque A est fini, X soit être de dimension finie; les conditions de possibilité relèvent alors de la topologie algébrique).

Peut-on en outre choisir B de telle sorte que $(B^*)^1$ soit un simplexe, ce qui revient à dire que B^*, ordonné par $(B^*)^+$ soit réticulé (voir problème 5).

b) Que dire des M(B) lorsque X n'est plus métrisable.

5) Avec les notations initiales, désignons par B^* le cône convexe des $g \geqslant 0$ de B.

Pour tout élément b de B^* qui est $\geqslant 0$ sur B^+, on a : $b \in (B^*)^+$. Sinon, en effet, il existerait une forme linéaire l faiblement continue dans B^*, telle que $l(b) < 0$ et $l \geqslant 0$ sur $(B^*)^+$.

Or l est identifiable à un élément de B; dire qu'il est $\geqslant 0$ sur $(B^*)^+$ signifie encore que $\int l\, d\mu \geqslant 0$ pour toute mesure $\mu \geqslant 0$ sur X, d'où $l \in B^+$. Il est donc impossible que $l(b) < 0$.

Ordonnons B par le cône convexe B^+; ce qui précède montre que $(B^*)^+$ n'est autre que l'ensemble des formes linéaires continues et positives sur l'espace normé et ordonné B.

Il en résulte, en répétant une démonstration connue dans le cas où B est de la forme $C_r(K)$, que si B (ordonné par B^+) est réticulé, B^* (ordonné par $(B^*)^+$) est complètement réticulé.

La réciproque est fausse; en effet quand B et X sont définis comme dans l'exemple précédent ($X = [0,1] \times \{a, b, c\}$), B^* est réticulé, tandis que B ne l'est pas.

Peut-on mettre la condition « B^* est réticulé » sous la forme « B' est réticulé », où B' serait un espace vectoriel contenant B et associé à B? (C'est le cas dans l'exemple précédent).

6) Soit $\mathfrak{B}$ un convexe compact non métrisable d'un e.v.t. loc. convexe séparé; et soit $\mathcal{E}$ l'ensemble de ses points extrémaux.

L'ensemble des $\mu \in \mathcal{M}^+(\mathfrak{B})$ qui sont pseudo-portées par $\mathcal{E}$ est un cône convexe réticulé pour son ordre propre. Donc si tout point de $\mathfrak{B}$ est barycentre d'au plus une $\mu \in \mathcal{M}^1(\mathfrak{B})$ pseudo-portée par $\mathcal{E}$, $\mathfrak{B}$ est un simplexe.

La réciproque est-elle vraie ?

Dans cet ordre d'idées on peut montrer que si $\mathfrak{B}$ est un simplexe, tout point de $\mathfrak{B}$ est barycentre d'au plus une $\mu \in \mathcal{M}^1(\mathfrak{B})$ qui soit *quasi-portée* par $\mathcal{E}$ en ce sens que $\mu(K) = 0$ pour *tout* compact K disjoint de $\mathcal{E}$. La démonstration est presque la même que celle donnée antérieurement pour les mesures *portées* par $\mathcal{E}$ (Choquet 1).

Ce résultat s'étend d'ailleurs, avec une formulation adaptée aux cônes convexes quelconques, à tout cône convexe saillant $\mathcal{C}$ tel que :

1) Toute suite décroissante d'éléments de $\mathcal{C}$ converge vers un élément de $\mathcal{C}$ (l'ordre étant celui associé à $\mathcal{C}$ canoniquement).

2) Pour tout ensemble totalement ordonné $A \subset \mathcal{C}$, il existe un sous-ensemble dénombrable de A, co-initial à A.

3) Pour tout élément extrémal δ de $\mathcal{C}$, et tout sous-cône fermé $\mathcal{A} \subset \mathcal{C}$ ne contenant pas δ, l'enveloppe convexe fermée de $\mathcal{A}$ ne contient pas δ.

BIBLIOGRAPHIE

[1] G. Choquet, Existence et unicité des représentations intégrales au moyen des points extrémaux dans les cônes convexes, *Séminaire Bourbaki*, décembre 1956.

[2] Errett Bishop et Karel de Leeuw, The representation of linear functionals by measures on sets of extreme points. *Annales de l'Institut Fourier*, Tome 9, 1959, p. 305-331.