Ann. Inst. Fourier, Grenoble
10 (1960), 303-306.

EXISTENCE DE NOYAUX SUR $R \times R$, INDÉFINIMENT DIFFÉRENTIABLES DANS L'OUVERT $\{(x, y) \in R \times R,\ x \neq y\}$, SEMI-RÉGULIER EN x, NON SEMI-RÉGULIER EN y [1]

par **Henri MOREL** (Paris).

On rencontre en théorie de l'hypoellipticité des noyaux-distributions dont on doit vérifier qu'ils sont simultanément : indéfiniment différentiables en dehors de la diagonale, semi-régulier en x et semi-régulier en y. On peut se demander (lettre de M. Trèves à M. Schwartz) si les deux premières propriétés entraînent la troisième; on montre que non en construisant l'exemple suivant.

Soit $\alpha(x)$ une fonction réelle d'une variable réelle, indéfiniment dérivable, à support dans $(-1 \leqslant x \leqslant 0)$ et telle que $0 < \alpha(x) \leqslant 1$ dans $(-1 < x < 0)$; $\alpha\left(-\frac{1}{2}\right) = 1$; $\int_{-1}^{0} \alpha(x)\, dx = \frac{1}{2}$; $\alpha(x) < |x|$ pour $x > -\frac{1}{4}$; α est décroissante pour $x > -\frac{1}{2}\cdot$ Alors si $x \to 0$, $\forall p > 0$, $\alpha(x)/x^p \to 0$.

Soit $m_p = \sup\limits_{x \in R} \left|\dfrac{d^p\alpha(x)}{dx^p}\right|$.

(1) L. Schwartz, *Théorie des distributions*, tome I, 2e édition, p. 138, Paris, Hermann.

Soit $g(x, y)$ la fonction définie dans R^2 comme suit :

pour $x \leqslant -\frac{1}{2}$ et $x \geqslant 0$, on a $g(x, y) = 0$;

pour $-\frac{1}{2^{n-1}} \leqslant x \leqslant -\frac{1}{2^n}$, $n \geqslant 2$, on a

$$g(x, y) = \alpha\left[\left(x + \frac{1}{2^n}\right)\Big/\frac{1}{2^n}\right]\alpha\left[\left(-y + \frac{1}{2^n}\right)\Big/\alpha\left(-\frac{1}{2^n}\right)\right].$$

Vérifions successivement que

I. $g(x, y)$ est un noyau indéfiniment différentiable en dehors de la diagonale : c'est une fonction indéfiniment différentiable dans le complémentaire de l'origine et bornée donc localement sommable; elle est d'ailleurs indéfiniment dérivable en x et en y partout : les dérivées à l'origine sont toutes nulles; mais la fonction $g(x, y)$ n'est pas continue en ce point; on peut d'ailleurs construire un exemple ayant les trois propriétés que nous vérifions pour $g(x, y)$ et en plus celle d'être partout différentiable jusqu'à un ordre fini quelconque.

II. Elle n'est pas semi-régulière en y :

Soit $u(x) \in \mathfrak{D}(R)$, $u(x) = 1$ pour $-1 \leqslant x \leqslant 0$; la distribution :

$$v(y) \in \mathfrak{D}(R) \to \iint_{R^2} g(x, y)\, u(x)\, v(y)\, dx\, dy$$

est définie par la fonction :

$$I(y) = \int_R g(x, y)\, u(x)\, dx = \int_{-1}^{0} g(x, y)\, dx.$$

Il suffit de voir que $I(y)$ n'est pas dérivable pour $y = 0$: on a $I(0) = 0$; pour

$$y_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n + \frac{1}{2}\alpha\left(-\left(\frac{1}{2}\right)^n\right), \qquad g(x, y_n) = \alpha\frac{x + \left(\frac{1}{2}\right)^n}{\left(\frac{1}{2}\right)^n},$$

donc $I(y) = \left(\frac{1}{2}\right)^n \times \frac{1}{2}$; si n tend vers $+\infty$ le quotient différentiel

$$\frac{I(y_n) - I(0)}{y_n} = \frac{1}{2}\,\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^n}{\left(\frac{1}{2}\right)^n + \frac{1}{2}\alpha\left(-\left(\frac{1}{2}\right)^n\right)} \to \frac{1}{2}$$

d'ailleurs, d'autres suites de quotients différentiels $\to 0$: il n'y a même pas de dérivée à droite.

III. $g(x, y)$ est semi-régulière en x : soit $\varphi \in \mathcal{D}(R)$; la distribution $u(x) \in \mathcal{D}(R) \to \iint_{R^2} g(x, y)\, u(x)\, \varphi(y)\, dx\, dy$ est définie par la fonction $J(x) = \int_R g(x, y)\, \varphi(y)\, dy$; pour $x \neq 0$, il est clair que J est indéfiniment dérivable ; voyons-le pour $x = 0$: soit $|\varphi(y)| < M$; soit $n(x)$ l'entier tel que $\frac{-1}{2^{n(x)-1}} < x \leqslant \frac{-1}{2^{n(x)}}$ (pour $x < 0$) on a donc : $\frac{2}{|x|} > 2^{n(x)}$ (1) on a

$$|g(x, y)| \leqslant \alpha\left[\left(-y + \frac{1}{2^{n(x)}}\right)\Big/\alpha\left(-\frac{1}{2^{n(x)}}\right)\right]$$

on a

$$J(0) = 0 ; |J(x)| < M \int g(x, y) dy \leqslant \frac{1}{2} M\, \alpha\left(-\frac{1}{2^{n(x)}}\right) < \frac{1}{2} M\alpha(x)$$

donc, $\left|\frac{J(x) - 0}{x}\right| \leqslant \frac{1}{2} M \frac{\alpha(x)}{x} \to 0$ si $x \to 0$ et $J(x)$ a une dérivée première $J'(0) = 0$.

$|J(x)|$ est majorée par une fonction $\alpha(x)$ dont toutes les dérivées sont nulles pour $x = 0$; cela implique que $J'(0)$ existe et $J'(0) = 0$, mais une fonction satisfaisant à ces conditions seulement pourrait très bien ne pas avoir d'autres dérivées $\left(\text{exemple } J(x) = e^{-\frac{1}{x^2}} \sin e^{\frac{1}{x^2}}\right)$. Montrons que $J(x)$ est indéfiniment dérivable pour $x = 0$ par récurrence : supposons que $J^p(0)$ existe et $J^p(0) = 0$; on a

$$\Big|\underset{x \neq 0}{Jp(x)} = \left|\int \frac{d^p}{dx^p} g(x, y) \quad \varphi(y) dy\right| \leqslant M \int \left|\frac{d^p}{dx^p} g(x, y)\right| dy$$

or,

$$\frac{d^p}{dx^p} g(x, y) = 2^{pn(x)} \alpha^p \left(\frac{x + \frac{1}{2^{n(x)}}}{\left(\frac{1}{2}\right)^{n(x)}}\right) \alpha\left(\frac{-y + \frac{1}{2^{n(x)}}}{\alpha\left(-\frac{1}{2^{n(x)}}\right)}\right)$$

donc

$$\Big|\underset{x \neq 0}{J^p(x)}\Big| \leqslant M \,.\, m_p \,.\, (2^{n(x)})^p \,.\, \frac{1}{2}\, \alpha\left(-\left(\frac{1}{2}\right)^{n(x)}\right)$$

donc, d'après (1),

$$\left|\underset{x\neq 0.}{\mathrm{J}^p(x)}\right| \leqslant \mathrm{M}\,.\,m_p\,.\,2p^{-1}\alpha(x)/x^p$$

donc

$$|\mathrm{J}^p(x) - \mathrm{J}^p(0)|/|x| \leqslant \mathrm{M}\,.\,m_p\,.\,2p^{-1}\alpha(x)/x^{p+1} \to 0 \quad \text{si} \quad x \to 0.$$

Donc $\mathrm{J}^{p+1}(0)$ existe et $\mathrm{J}^{p+1}(0) = 0$.