

MICHEL GODEFROID

**Une propriété des fonctions B.L.D. dans
un espace de Green**

Annales de l'institut Fourier, tome 9 (1959), p. 301-304

http://www.numdam.org/item?id=AIF_1959__9__301_0

© Annales de l'institut Fourier, 1959, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales de l'institut Fourier » (<http://annalif.ujf-grenoble.fr/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

UNE PROPRIÉTÉ DES FONCTIONS B.L.D. DANS UN ESPACE DE GREEN

par M. Godefroid (Montpellier)

On connaît divers résultats sur l'allure à la frontière des fonctions admettant une semi-norme de Dirichlet finie. Ainsi, pour une fonction harmonique et du type précédent dans un domaine circulaire, Beurling a montré ⁽¹⁾ que la variation totale sur tout rayon est finie, sauf pour un ensemble de rayons découpant sur la circonférence un ensemble de mesure nulle et même « polaire », c'est-à-dire de capacité extérieure nulle; il y a donc en particulier une limite radiale pour presque tout rayon. On a ensuite adapté le résultat précédent à des fonctions et domaines plus généraux et approfondi en particulier le cas des fonctions de Beppo-Levi-Deny, dites brièvement « B.L.D. » [2] ou « B.L. précisées » [4]. En espace euclidien, elles peuvent être définies comme limite quasi-partout (c'est-à-dire sauf sur un ensemble polaire) et en semi-norme de Dirichlet d'une suite de fonctions à gradient continu de carré sommable. La définition est la même dans un espace de Green \mathcal{E} , notion ⁽²⁾ qui contient celles de domaine euclidien borné et de surface de Riemann hyperbolique; il faut simplement considérer la fonction comme non définie aux « points à l' ∞ » possibles de \mathcal{E} . Choisissons un point P de l'espace de Green \mathcal{E} et considérons l'ensemble \mathcal{L} des « lignes de Green » l issues de P (arcs ouverts *maximaux* tels qu'en chaque point grad G_P soit $\neq 0$ et tangent, G_P étant la fonction de Green de pôle P); dans le cas particulier où \mathcal{E} est un disque euclidien ouvert

⁽¹⁾ Voir par ex. J. LELONG [5], p. 243.

⁽²⁾ M. BRELOT et G. CHOQUET [3], p. 217.

et P son centre, on retrouve les rayons du cercle. Soit dg la mesure, dite « mesure de Green » de total 1 sur \mathcal{L} et proportionnelle à la mesure angulaire sur l'ensemble des directions de départ en P ; on sait ⁽³⁾ que, sur presque toute (au sens de la mesure de Green) ligne $l \in \mathcal{L}$, la borne inférieure de G_P est nulle; on dit qu'une telle ligne est « régulière » et nous noterons leur ensemble \mathcal{L}' . Ceci a permis de définir la notion de « radiale » d'une fonction u dans \mathcal{E} : c'est, lorsqu'elle existe, une fonction $\varphi(l)$ de $l \in \mathcal{L}'$ telle que $\int |u_\lambda^\lambda - \varphi(l)| dg \rightarrow 0$ quand $\lambda \rightarrow 0$, u_λ^λ désignant la valeur de u au point $G_P = \lambda$ de la ligne l .

M. Brelot a montré ⁽⁴⁾ que toute fonction u , B.L.D. dans \mathcal{E} admet une radiale (pour tout P). Nous allons préciser ce résultat en montrant que, pour presque toute $l \in \mathcal{L}'$, u_λ^λ a une limite finie pour $\lambda \rightarrow 0$. On considèrera l'ensemble $\Delta_P^{\lambda_0}$ où $G_P < \lambda_0$; son complémentaire contient P et est compact si λ_0 est $< G_P(P)$ (fini ou non) et assez voisin de ce nombre (car, si $G_P(P)$ est fini, G_P admet en P un maximum strict et $\sup G_P < G_P(P)$). On introduit pour toute fonction u ,

la variation totale $V_u(l)$ de u_λ^λ comme fonction de λ dans l'intervalle $[0, \lambda_0]$. On sait que u_λ^λ a une limite finie pour $\lambda \rightarrow 0$ si $V_u(l)$ est finie, ce que nous allons utiliser.

LEMME 1. — *Si la fonction u_n sur $l \cap \Delta_P^{\lambda_0}$, $l \in \mathcal{L}'$, a , pour $n \rightarrow \infty$, une limite finie u en tout point, $V_u(l) \leq \liminf_{n \rightarrow +\infty} V_{u_n}(l)$.*

Soit en effet K quelconque $< V_u(l)$. On peut trouver une suite finie de points de $l \cap \Delta_P^{\lambda_0}$, M_i , $i = 1, \dots, p$, telle que

$$\sum_2^p |u(M_i) - u(M_{i-1})| > K; \text{ or}$$

$$\sum_2^p |u(M_i) - u(M_{i-1})| = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_2^p |u_n(M_i) - u_n(M_{i-1})| \leq \liminf_{n \rightarrow +\infty} V_{u_n}(l).$$

LEMME 2. — *Soit dans \mathcal{E} une fonction u_n B.L.D. à gradient continu et semi-norme bornée tendant vers une fonction u supposée finie dans $\Delta_P^{\lambda_0}$ sur toutes les lignes d'un ensemble α de lignes l de \mathcal{L}' . Alors $\int_\alpha V_u(l) dg$ est finie.*

⁽³⁾ M. BRELOT et G. CHOQUET [3], p. 236 et p. 239, th. 23.

⁽⁴⁾ M. BRELOT [2], p. 394, th. 5.

En effet

$$\int_{\alpha} \bar{V}_u(l) dg \leq \int_{\alpha} \liminf V_{u_n}(l) dg \leq \liminf \int_{\alpha} \bar{V}_{u_n}(l) dg.$$

Or $V_{u_n}(l)$ est \leq à l'intégrale le long de $l \cap \Delta_P^{\lambda_0}$ de $|\text{grad } u_n|$ par rapport à l'arc ds , ce qu'on écrira $\int_{l_0} |\text{grad } u_n| ds$. Donc $\int_{\alpha} \bar{V}_{u_n}(l) dg \leq \int_{\alpha} \left(\int_{l_0} |\text{grad } u_n| ds \right) dg \leq \int_{\Delta_P^{\lambda_0}} |\text{grad } u_n| |\text{grad } G| d\nu$ d'où la majoration $\sqrt{\int_{\Delta_P^{\lambda_0}} \text{grad}^2 u_n d\nu} \sqrt{\int_{\Delta_P^{\lambda_0}} \text{grad}^2 G d\nu}$. Le second facteur est fini et le premier borné, donc

$$\liminf_{n \rightarrow +\infty} \int_{\alpha} \bar{V}_{u_n}(l) dg$$

est finie.

LEMME 3. — *Les lignes de \mathcal{L} rencontrant un ensemble polaire E donné dans $\Delta_P^{\lambda_0}$ forment un ensemble de mesure dg nulle.*

Soit $M_0 \in E$, appartenant à une ligne de \mathcal{L} . Par tout point M d'un voisinage \mathcal{V} assez petit passe une ligne de \mathcal{L} rencontrant une petite « sphère de Green » Σ , $G_P = \lambda_1$, en un point Q . Si M', Q' sont les images de M et Q dans les cartes locales des voisinages de M_0 et M'_0 , l'application $M' \rightarrow Q'$ (dans l'espace image des cartes locales de \mathcal{E}) est une contraction, à une similitude près, vu la différentiabilité des fonctions qui la définissent. De sorte que, dans les voisinages considérés, la capacité dans cet espace image (dans le plan, capacité logarithmique) est, à un facteur fixe près, diminuée par l'application considérée et un ensemble polaire devient un ensemble polaire. Donc aussi par l'application $M \rightarrow Q$. Les lignes de \mathcal{L} rencontrant $E \cap \mathcal{V}$ rencontrent Σ selon un ensemble polaire, donc de mesure superficielle nulle sur Σ . Cet ensemble de lignes est donc de mesure dg nulle; le lemme résulte alors de la possibilité de couvrir l'ensemble des points de E situés sur des lignes l par une réunion dénombrable de voisinages tels que \mathcal{V} .

Des trois lemmes ci-dessus résulte que la variation totale le long de $l \cap \Delta_P^{\lambda_0}$ de la fonction u , B.L.D. dans \mathcal{E} , est finie pour presque toute ligne l de \mathcal{L}' . Il suffit d'introduire une suite u_n de fonctions B.L.D. à gradient fini continu convergeant en semi-norme et quasi-partout vers u . Donc :

THÉORÈME. — *Si u est B.L.D. dans \mathcal{E} , pour presque toute ligne de Green régulière, u admet une limite finie quand $G \rightarrow 0$ sur la ligne considérée.*

BIBLIOGRAPHIE

- [1] M. BRELOT. Points irréguliers et transformations continues en théorie du potentiel, *Journ. de Math.*, XIX, fasc. 4, 1940, p. 319-337.
 - [2] M. BRELOT. Étude et extensions du principe de Dirichlet, *Ann. Inst. Fourier*, 5, 1953-1954, p. 371-419.
 - [3] M. BRELOT et G. CHOQUET. Espaces et lignes de Green, *Ann. Inst. Fourier*, 3, 1951, p. 199-263.
 - [4] J. DENY et J. L. LIONS. Les espaces du type de Beppo-Levi, *Ann. Inst. Fourier*, 5, 1953-1954, p. 305-369.
 - [5] J. LELONG-FERRAND. Représentation conforme et transformations à intégrale de Dirichlet bornée, Gauthier-Villars, Paris, 1955.
-