ANNALES DE L'INSTITUT FOURIER

JULIEN KRAVTCHENKO

Note sur les solutions approchées du problème déterminé des sillages

Annales de l'institut Fourier, tome 3 (1951), p. 287-299

<http://www.numdam.org/item?id=AIF_1951__3__287_0>

NOTE SUR LES SOLUTIONS APPROCHÉES DU PROBLÈME DÉTERMINÉ DES SILLAGES

par Julien **KRAVTCHENKO** (Grenoble).

I. — Introduction.

Le problème déterminé du sillage, si important en physique mathématique, ne semble pas pouvoir être résolu explicitement et rigoureusement en dehors de quelques cas particuliers simples (cas de certains profils polygonaux). Or, l'ingénieur et le physicien ont souvent besoin de solutions, calculables numériquement, et correspondant à des profils donnés courbes. Il y a donc un intérêt majeur à faire avancer les méthodes approchées de résolution du système intégro-différentiel non linéaire, auquel M. H. Villat ([1], [2]) (1) a ramené autrefois le problème dans le cas des profils à tangente continue (ou avec un nombre fini des points anguleux). Nous pensons rendre service au lecteur de langue française en présentant, ci-après, la récente solution du problème indéterminé du sillage, dûe à M. J. M. Rapoport [3] et dont cet auteur a déduit un procédé empirique (mais qui semble efficace) de résolution approchée du système de M. Villat. Citons, en particulier, l'excellente solution approchée du problème de la proue symétrique circulaire en fluide indéfini que M. Rapoport sut tirer de sa méthode et qu'on trouvera indiquée ci-après. Il serait, d'ailleurs, intéressant de comparer ce dernier résultat de M. Rapoport à celui de M. J. Brodetsky [4] dont la solution, basée sur les formules de M. Villat, est réputée très satisfaisante.

Nous présentons ensuite quelques extensions, d'ailleurs élémentaires, de la solution indéterminée de M. Rapoport et, chemin faisant, nous précisons la portée analytique de sa méthode.

(1) Les chiffres entre crochets renvoient à la bibliographie placée à la fin de l'article.

On sait que la solution du problème du sillage, tant déterminé qu'indéterminé, doit, pour être physiquement acceptable, satisfaire aux conditions de validité physique de Brillouin. A cet égard, la la discussion de M. Rapoport peut être améliorée tant en rigueur qu'en simplicité.

Pour y parvenir, il nous suffira d'appliquer quelques critères classiques de validité, dûs à MM. Villat et J. Leray ([5] et [6]), qui semblent être restés ignorés de M. Rapoport et dont on pourra trouver une justification détaillée dans [7], chapitre I.

II. — Problèmes déterminés et indéterminés du sillage. (Méthode de M. Rapoport.)

1. Dans le plan de la variable complexe $z = x + iy$, envisageons un arc de courbe simple $\widehat{OA}$, d'origine $z = 0$, situé dans le domaine $y \geqslant 0$ et n'ayant en commun avec Ox que le point O. Soit $\zeta = \xi + i\eta$ une variable complexe auxiliaire. Je rappelle que le problème symétrique déterminé du sillage consiste à définir dans le domaine $\eta \geqslant 0$ du plan ζ une fontion holomorphe $z = z(\zeta)$ et possédant dans ce domaine les propriétés suivantes.

1) $\left(\frac{d\zeta}{dz}\right)_{\zeta=\infty} = C$, C étant une constante réelle > 0, à priori inconnue;

2) $z(\zeta)$ fait correspondre : à $-\infty \leqslant \xi \leqslant 0$, $\eta = 0$ le segment infini $-\infty \leqslant x \leqslant 0$, $y = 0$; à $0 \leqslant \xi \leqslant 1$, $\eta = 0$, l'arc $\widehat{OA}$ (donné à priori); à $1 \leqslant \xi \leqslant \infty$, $\eta = 0$, une ligne λ joignant A au point à l'infini; la forme de λ est inconnue à priori;

3) le long de λ on doit avoir (²)

$$\left|\frac{d\zeta}{dz}\right| = C. \tag{1}$$

Une fois $z(\zeta)$ déterminée, il faut discuter la validité physique de la solution en s'assurant que 1) $z(\zeta)$ est univalente dans $\eta \geqslant 0$; 2) λ n'a pas de point commun avec Ox; 3) $\left|\frac{d\zeta}{dz}\right| \leqslant C$ pour $\eta = 0$. De ces trois conditions de valadité, énoncées par Marcel Brillouin, seules les deux premières sont essentielles (cf. [7], chapitre I).

(²) D'après ce qui précède, le potentiel complexe f est lié à ζ par $\zeta = Cf$, si $\left(\frac{df}{dz}\right)_{\zeta=\infty} = 1$.

2. La méthode, que M. Rapoport utilise pour résoudre le problème ci-dessus, repose sur une forme particulière — et qui semble, en partie originale — de la solution du problème symétrique indéterminé du sillage. Je rappelle que ce dernier problème revient, en gros (nous n'explicitons pas ici toutes les conditions classiques de régularité), à former une fonction $z=z(\zeta)$, holomorphe pour $\eta>0$, satisfaisant à (1) pour $\eta=0$, $1\leqslant\xi\leqslant\infty$, possédant une dérivée réelle positive, finie pour $-\infty\leqslant\xi\leqslant 0$, $\eta=0$, telle, enfin, que

$$\left(\frac{d\zeta}{dz}\right)_{\zeta=\infty}=C.$$

M. Rapoport remarque que la fonction $z(\zeta)$, nulle à l'origine et définie au moyen de la relation :

$$(2)\qquad \frac{d\zeta}{dz}=\frac{C\sqrt{\zeta}}{\sqrt{\zeta-1}+i}\,e^{i[\sqrt{\zeta}\,P(\zeta)-\sqrt{\zeta-1}\,Q(\zeta)]},$$

remplit d'office toutes les conditions requises chaque fois que : 1) l'on choisit pour les radicaux leurs déterminations arithmétiques pour $\zeta=\xi+io$, $\xi>1$, 2) l'on prend pour $P(\zeta)$ et $Q(\zeta)$ des polynomes de même degré, à coefficients réels, tels que :

$$(3)\qquad Q(\zeta)-\sqrt{\frac{\zeta}{\zeta-1}}\,P(\zeta)=o\left(\frac{1}{\zeta}\right),\qquad \text{pour}\qquad \zeta\to\infty.$$

Moyennant (3), la condition à l'infini (1) est remplie.

Si on pose ;

$$P(\zeta)=\sum_0^n a_p z^p,$$

$$Q(\zeta)=\sum_0^n b_p z^p,$$

On aura, d'après (3):

$$(4)\qquad b_q=\sum_{p=q}^{p=n} a_p\alpha_{p-q}\qquad q=1,2,\ldots,n$$

ou :

$$\alpha_m=\frac{(2m)!}{2^{2m}(m!)^2}.$$

En d'autres termes, on peut choisir arbitrairement l'un des polynomes P et Q ; l'autre est alors déterminé sans ambiguïté.

L'image, dans le plan z, du segment $\eta=0$, $0\leqslant\xi\leqslant 1$ par (2) sera un arc de courbe $\widehat{OA}$, possédant au point $z=z(\xi)$, $0 \leqslant \xi \leqslant 1$ ([3]) une tangente : si on oriente celle-ci dans le sens des ξ croissants et si on note $\Psi(\xi)$ son angle algébrique avec Ox, on a :

$$\Psi(\xi)=\frac{\pi}{2}-\sqrt{\xi}\,P(\xi). \tag{5}$$

Ainsi en complétant la figure par symétrie relativement à Ox, l'obstacle total aura en O une tangente continue. Comme $P(\xi)$ est continue, $\Psi(\xi)$ sera continue pour $0 \leqslant \xi \leqslant 1$; on voit que, sous sa forme actuelle, la solution de M. Rapoport ne fournit que des obstacles à tangente continue. D'ailleurs P et Q étant analytiques, $\widehat{OA}$, d'après (2) sera même un arc analytique, sauf peut-être, pour $\xi=1$.

Enfin, on trouve que la tangente à λ au point $z(\xi)$, $1 \leqslant \xi \leqslant \infty$, orientée dans le sens des ξ croissants, fait avec Ox un angle

$$\Psi(\xi)=\arcsin\frac{1}{\sqrt{\xi}}-\sqrt{\xi}P(\xi)+\sqrt{\xi-1}\,Q(\xi), \tag{6}$$

la détermination choisie pour arc sin étant comprise entre 0 et $\frac{\pi}{2}$.

D'après (5) et (6), $\widehat{OA}$ et λ forment une courbe à tangente contine ; résultat conforme à la théorie générale (cf. [6] et [7], chapitre I).

Au total, la solution indéterminée de M. Rapoport est assez différente de la solution classique de M. Villat. La portée de la méthode ci-dessus est restreinte, puisqu'elle ne donne que des obstacles analytiques et réguliers ; en revanche, elle est d'une forme analytique plus simple et plus maniable, puisqu'elle élimine les difficultés de calcul inhérentes aux intégrales singulières qu'utilise M. Villat.

Nous laissons de côté, pour le moment, la discussion de la validité physique des résultats ci-dessus.

3. Nous sommes maintenant en mesure de mettre en équations le problème déterminé, posé pour un profil donné $\widehat{OA}$, de longueur totale α. Soit l, l'abscisse curviligne du point $M \in \widehat{OA}$, comptée positivement de O à A ($0 \leqslant l \leqslant \alpha$) ; notons $\Psi(l)$ l'angle avec Ox de la tangente en M à $\widehat{OA}$, orientée dans le sens des l croissants. Il est clair que la donnée de $\Psi(l)$, ($0 \leqslant l \leqslant \alpha$) définit $\widehat{OA}$ sans ambiguïté. Posons (cf. [3]) :

$$\varphi(l)=\frac{\pi}{2}-\Psi(l); \qquad K(l)=\frac{d\varphi}{dl}=-\frac{d\Psi}{dl}.$$

([3]) Pour abréger, nous poserons, $\varphi(\zeta)$ étant une fonction de ζ : $\varphi(\xi+i0)=\varphi(\xi)$.

D'après cela, $K(l)$ est la courbure de $\widehat{OA}$ en M. Posons encore :

$$(7) \qquad Z(l) = Ke^{i\varphi} = -i\frac{d\Psi}{dl}e^{-i\Psi}, \qquad 0 \leqslant l \leqslant \alpha.$$

Mais le long de $\widehat{OA}$, $dz = e^{i\Psi}dl$, d'où :

$$(7') \qquad Z(l) = -i\frac{d\Psi}{dz}.$$

Lorsque l varie de 0 à α, le point d'affixe $Z(l)$ décrit dans le plan z un arc de courbe L que nous appellerons associé à $\widehat{OA}$. Inversement, si on se donne arbitrairement un contour L d'équation :

$$Z(l) = -\frac{d\gamma}{dl}e^{i\gamma},$$

$\gamma(l)$ étant une fonction arbitraire (assez régulière), définie pour $0 \leqslant l \leqslant \alpha$, il existera un contour $\widehat{OA}$ et un seul, d'origine O, défini au moyen de l'équation intrinsèque :

$$\Psi(l) = \frac{\pi}{2} - \gamma(l).$$

Cela étant, formons l'équation du contour associé à la solution indéterminée (2). Posons avec Levi-Civita :

$$(8) \qquad \begin{cases} \omega = \theta + i\tau\,; \\ \dfrac{d\zeta}{dz} = Ce^{-i\omega(\zeta)}. \end{cases}$$

On a alors [cf. (5)] :

$$(9) \qquad \begin{cases} \theta(\xi) = \Psi(\xi)\,; \\ \tau(\xi) = \sqrt{1-\xi}\,Q(\xi) - \log\dfrac{\sqrt{\xi}}{\sqrt{1-\xi}+1}\,; \end{cases} \quad \text{pour} \quad 0 \leqslant \xi \leqslant 1.$$

De (2) il résulte alors :

$$\frac{dl}{d\xi} = \frac{1}{C}e^{-\tau(\xi)}, \quad 0 \leqslant \xi \leqslant 1,$$

de sorte que $l(\xi)$ est une fonction bien définie pour $0 \leqslant \xi \leqslant 1$ ainsi que son inverse $\xi(l)$. En égard à (7), il vient :

$$(10) \quad \left\{ \begin{aligned} Z[\xi(l)] &= -i \frac{d\theta(\xi)}{d\xi} \left(\frac{d\zeta}{dz} \right)_{\zeta = \xi} = \\ & C \frac{\xi P'(\xi) + \frac{1}{2} P(\xi)}{1 + \sqrt{1 - \xi}} e^{\sqrt{1-\xi}Q(\xi) + i\sqrt{\xi}P(\xi)}, \quad 0 \leqslant \xi \leqslant 1. \end{aligned} \right.$$

Il est clair, dès lors, que la formule (2) résoudra le problème déterminé posé relativement au contour $\widehat{OA}$, donné au moyen de $\Psi = \Psi(l)$, $0 \leqslant l \leqslant \alpha$, si l'on peut choisir les polynomes $P(\zeta)$ et $Q(\zeta)$ et la constante C, de manière que le contour (10) coïncide avec le contour L associé à $\widehat{OA}$ [cf. (7')].

La méthode d'approximation de M. Rapoport revient alors à approcher un arc (7), donné à priori, au moyen d'expressions (10). En sorte que tout revient, en définitive, à choisir judicieusement C et le polynome $P(\zeta)$ [ou $Q(\zeta)$].

Malheureusement, M. Rapoport ne semble pas avoir trouvé de processus régulier permettant de réaliser rationnellement l'approximation ci-dessus, équivalente, au fond, à l'approximation des solutions du système de M. Villat. Il serait très désirable de compléter à ce point de vue le travail de cet auteur. Mais la forme, relativement simple, au point de vue analytique, de la solution (2) semble particulièrement adaptée à une recherche par tâtonnement de la solution déterminée.

4. Ainsi, supposons que l'arc $\widehat{OA}$ soit un arc de cercle de rayon R et de centre $x = R$, $y = 0$. Le contour associé L a pour équation :

$$Z(l) = \frac{1}{R} e^{\frac{il}{R}}.$$

L est donc un arc de cercle de rayon $\frac{1}{R}$ centré sur $z = 0$. Prenons alors :

$$C = \frac{1,722}{R}; \qquad P(\zeta) = 0,907 + 0,062\zeta; \qquad Q(\zeta) = 0,938 + 0,062\zeta.$$

Les relations (4) sont satisfaites.

D'après M. Rapoport, l'arc associé $Z(\xi)$ a une allure donnée par le tableau ci-après ; ou on a posé : $\arg Z(\xi) = \varphi = \sqrt{\xi}P(\xi)$.

ξ	0	0,01	0,04	0,09	0,16	0,25	0,36	0,49	0,81	1
$\varphi(\xi)$	0	5°12′	10°26′	15°42′	21°01′	26°26′	31°58′	37°24′	49°22′	55°32′
$\lvert Z(\xi)\rvert$	$\frac{0,998}{R}$	$\frac{0,998}{R}$	$\frac{1,001}{R}$	$\frac{1,003}{R}$	$\frac{1,004}{R}$	$\frac{1,004}{R}$	$\frac{1,000}{R}$	$\frac{0,992}{R}$	$\frac{0,975}{R}$	$\frac{0,940}{R}$

On voit que $|Z(\xi)|$ est constant à 6 pour 100 près. Il se trouve que le profil $\widehat{OA}$, donné par (2), ou $P(\zeta)$ et $Q(\zeta)$ sont remplacés par les fonctions linéaires ci-dessus, a un rayon de courbure compris entre 0,9998 R et 1,0002 R. On a donc une excellente solution approchée du problème symétrique du sillage en fluide indéfini pour un arc de cercle d'ouverture 111°04′. De plus : $Q(1) = 1$. On verra ci-après que cette relation assure pour la ligne λ correspondante un détachement en proue. Une discussion complémentaire, dont on trouvera le principe au chapitre III, montrera que nous avons construit une très bonne solution approchée du problème de la proue circulaire symétrique, vérifiant toutes les conditions de validité physique.

III. — Compléments analytiques et extensions.

5. Il est aisé d'interpréter la présence du facteur $\sqrt{\zeta}[\sqrt{\zeta - 1} + i]^{-1}$ au second membre de (2). Si on fait $P(\zeta) \equiv Q(\zeta) \equiv 0$ dans cette formule, on retrouve, au facteur C près, le potentiel des vitesses de la plaque plane symétrique.

6. Cherchons si on peut utiliser, pour écrire (2), des fonctions $P(\zeta)$ et $Q(\zeta)$ autres que des polynomes. La fonction $z(\zeta)$ est holomorphe pour $\eta > 0$. Donc $P(\zeta)$ et $Q(\zeta)$ doivent être holomorphes dans ce domaine. Mais $P(\zeta)$ et $Q(\zeta)$ doivent être, de plus, réelles et bornées pour ζ réel. Il s'ensuit que $P(\zeta)$ et $Q(\zeta)$ sont prolongeables analytiquement à travers l'axe réel $\eta = 0$; ce sont donc des fonctions entières, dont les développements tayloriens sont à coefficients réels. Si ces derniers développements n'étaient pas limités, $\frac{d\zeta}{dz}$ présenterait une singularité essentielle pour $\zeta = \infty$, circonstance incompatible avec la condition (1).

Ainsi, la formule (2) ne résout le problème indéterminé que si $P(\zeta)$ et $Q(\zeta)$ sont des polynomes liés par (3) et (4).

7. On peut, cependant, généraliser un peu la solution de M. Rapoport. Tout d'abord, remplaçons dans (2) l'exposant de l'exponentielle par $\sqrt{\zeta}P(\zeta)-\sqrt{\zeta-1}\,Q(\zeta)-\sqrt{\zeta-\xi_1}\,P_1(\zeta)$, ou $Q(\zeta)$ se déduit de $P(\zeta)$ au moyen de (4); ou ξ_1 est un nombre réel tel que $0<\xi_1<1$; ou le radical $\sqrt{\zeta-\xi_1}$ est réel et positif pour $\zeta=\xi>\xi_1$; où enfin, $P_1(\zeta)$ est un polynome de même degré que $P(\zeta)$ et déduit de celui-ci au moyen de :

$$P_1(\zeta)-\sqrt{\frac{\zeta}{\zeta-\xi_1}}\,P(\zeta)=o\left(\frac{1}{\zeta}\right) \qquad \text{pour} \qquad \zeta\to\infty.$$

Il est clair que la condition à l'infini (1) est encore satisfaite, ainsi que les conditions frontières pour $\eta=0$, $-\infty\leqslant\xi\leqslant 0$ et $1\leqslant\xi\leqslant\infty$.

Mais la formule (5) est à modifier comme il suit :

$$\Psi(\xi)=\frac{\pi}{2}-\sqrt{\xi}P(\xi), \qquad \text{pour} \qquad 0\leqslant\xi\leqslant\xi_1;$$

$$\Psi(\xi)=\frac{\pi}{2}-\sqrt{\xi}P(\xi)+\sqrt{\xi-\xi_1}\,P_1(\xi), \qquad \text{pour} \qquad \xi_1\leqslant\xi\leqslant 1,$$

L'arc $\widehat{OA}$ correspondant posséderait donc encore une tangente continue ; mais au point $z=z(\xi_1)$, la courbure de $\widehat{OA}$ subirait une discontinuité.

Bien entendu, il serait loisible de former des solutions présentant un nombre fini de telles singularités.

7. On peut, aussi, étendre la solution (2) de M. Rapoport au cas des profils présentant un nombre fini de points anguleux. Il suffit, en effet, de multiplier le second nombre de (2) par un produit de facteurs tels que :

$$f_1(\zeta)=\left[\frac{\sqrt{\zeta-\xi_1}}{\sqrt{\zeta-1}+i\sqrt{1-\xi_1}}\right]^{\alpha},$$

où ξ_1 est encore une constante positive ($0<\xi_1<1$), où les radicaux sont pris au sens arithmétique lorsque les quantités sous le radical sont réelles et positives et où α est une constante réelle ($-2<\alpha<2$. On voit que : 1) $\arg f_1(\zeta)=0$ pour $\zeta=\xi$, $-\infty\leqslant\xi\leqslant 0$; 2) $|f_1(\zeta)|=1$ pour $\zeta=\xi$, $1\leqslant\xi\leqslant\infty$; 3) $\arg f_1(\zeta)$ subit une discontinuité de

$-\frac{\pi\alpha}{2}$ lorsque ξ, croissant de o à 1, passe par la valeur ξ_1. Il s'ensuit que le second membre de (2), multiplié par le facteur $f_1(\zeta)$, donnera encore une solution indéterminée du problème du sillage ; mais, cette fois, le contour $\widehat{OA}$ présentera au point $z = z(\xi_1)$ un point anguleux. A noter que la correspondance $z(\zeta)$ sera continue au point $\zeta = \xi_1$, moyennant la restriction, imposée ci-dessus à α : $(-2 < \alpha < 2)$.

Bien entendu, on peut, par ce procédé, former des solutions indéterminées pour des contours comportant un nombre fini de points anguleux.

8. Une extension des résultats de M. Rapoport au cas d'un obstacle symétrique placé symétriquement dans un canal à bords rectilignes et parallèles sera publiée ailleurs.

IV. — Validité physique des solutions de M. Rapoport.

9. Cherchons à former des critères pour assurer l'univalence de $z(\zeta)$ ainsi que le non-recoupement de λ et Ox ; $z(\zeta)$ sera donnée par (2) et l'obstacle sera supposé réduit à l'arc $\widehat{OA}$, en sorte que nous nous limitons, pour commencer, aux profils dits en gouttière (cf. la fin du paragraphe 1).

Le domaine de définition de $z(\zeta)$ étant simplement connexe, la fonction $z(\zeta)$ sera univalente chaque fois que $\widehat{OA}$ et λ déduits de (2) formeront un contour simple ne recoupant pas Ox. Or, il suffit, pour que $\widehat{OA}$ soit un contour simple que

$$0 \leqslant \theta(\xi) \leqslant \pi, \qquad 0 \leqslant \xi \leqslant 1,$$

ou encore [cf. (8) et (9)] :

$$-\frac{\pi}{2} \leqslant \sqrt{\xi}P(\xi) \leqslant \frac{\pi}{2}, \qquad 0 \leqslant \xi \leqslant 1.$$

Car alors l'ordonnée $y(\xi)$ de $M \epsilon \widehat{OA}$ sera une fonction croissante de de ξ pour $0 \leqslant \xi \leqslant 1$. On sait (cf. [5] ou [7], chapitre II) qu'il en sera nécessairement de même le long de la ligne λ. Il en résulte que la ligne de jet λ ne recoupe pas Ox, de sorte qu'en complétant la figure par symétrie relativement à cet axe, l'ensemble formé de l'obstacle et des deux lignes libres sera dépourvu de points multiples.

10. Il reste à discuter la condition $\left|\frac{d\zeta}{dz}\right| \leqslant C$ pour $\eta \geqslant 0$. On sait (cf. [7] chapitre II, par exemple) qu'il suffit de la vérifier le long de $\widehat{OA}$ seulement. D'après (9), cela s'écrira :

$$(11) \quad \sqrt{1-\xi}\, Q(\xi) - \log \frac{\sqrt{\xi}}{\sqrt{1-\xi}+1} \leqslant 0, \qquad 0 \leqslant \xi \leqslant 1.$$

D'ailleurs, pour un grand nombre de profils, on peut affirmer, à priori, que l'inégalité précédente est satisfaite. On trouvera dans [7] (cf. chapitre II) une série de résultats obtenus sur ce sujet par MM. Villat, Leray, C. Jacob et nous-même.

Observons, en passant, que dans le voisinage de $\xi = 0$, (11) est toujours satisfait. Dans le voisinage de $\xi = 1$, le premier membre est visiblement du signe de $\sqrt{1-\xi}\,[Q(\xi) - 1]$, si $Q(1) \neq 1$, de telle sorte que nous avons la condition nécessaire de validité, mais qui, bien entendu, est loin d'être suffisante :

$$Q(1) \leqslant 1.$$

11. Supposons maintenant que l'on veuille prolonger l'arc $\widehat{OA}$ tangentiellement et avec une courbure continue dans le sillage ; au-delà de A, l'obstacle prolongé doit rester étranger à l'image du domaine $\eta \geqslant 0$. Je rappelle que, d'après les résultats classiques de Brillouin, de MM. Villat et Leray, cela exige que la courbure de λ soit finie en A. Alors λ est nécessairement osculatrice à $\widehat{OA}$ en A et le détachement correspondant est dit en proue. On sait que si l'on pose : $f = \frac{\zeta}{C}$, (f étant le potentiel complexe), la courbure de λ au point $z = z(\xi)$ vaut $\left(\frac{d\omega}{df}\right)_{\zeta=\xi}$, $(\xi > 1)$, ω étant la fonction de Levi-Civita définie par (8) (4). Or, d'après (2) il vient :

$$(12) \quad \frac{d\omega}{df} = C \left\{ \frac{1}{2\sqrt{\zeta-1}} \left[Q(\zeta) - \frac{1}{\zeta} \right] \right.$$
$$\left. + \sqrt{\zeta-1}\, Q'(\zeta) - \frac{1}{2\sqrt{\zeta}} P(\zeta) - \sqrt{\zeta}\, P'(\zeta) \right\}.$$

(4) A noter que nous changeons de convention de signe pour la courbure, laquelle s'exprimerait par $-\left(\frac{d\omega}{df}\right)_{\zeta=\xi}$, $\xi \geqslant 1$, suivant M. Rapoport.

Le détachement en A sera dès lors en proue si le second membre de (12) est fini pour $\zeta = 1$. Comme $Q(\zeta)$ est un polynome, il faut, et il suffit pour qu'il en soit ainsi, que :

$$Q(1) = 1. \tag{13}$$

On retrouve ainsi les conclusions que M. Rapoport obtient après des raisonnements directs et, partant, plus longs.

D'après ce qui précède, la solution indéterminée (2) nous donne un moyen facile de construire une infinité d'exemples de détachement en proue (plus malaisés à obtenir à partir des formules résolutives générales de M. Villat); en particulier, l'exemple traité au § 4 satisfait à la condition (13).

12. Toutefois, la discussion de validité n'est pas pour autant terminée lorsque l'obstacle $\widehat{OA}$ se prolonge au delà du point de détachement. Il faut, en effet, s'assurer encore que la partie prolongée du profil ne recoupe pas λ : ensuite, il faut vérifier que la condition $\left|\frac{d\zeta}{dz}\right| \leqslant C$; $\eta \geqslant 0$ est satisfaite. A ce sujet, M. Rapoport se borne à des indications très brèves et ne semble avoir recours qu'à la vérification directe. Or, pour garantir la validité locale de la solution (dans le voisinage de A), ce qui est le point délicat, il suffit d'utiliser les critères nécessaires et suffisants de M. Leray (cf. [7], § 13). Les résultats de M. Leray ont une portée très générale et s'appliquent à toutes les solutions susceptibles d'être représentées par les formules de M. Villat. Dans le cas de la solution (2), il est aisé de retrouver directement les conclusions de M. Leray comme suit.

13. Posons :

$$\zeta - 1 = u = \rho e^{i\varphi}.$$

Dans le domaine $\eta \geqslant 0$, on doit avoir : $0 \leqslant \varphi \leqslant \pi$. D'après (12), on a le développement limité, valable dans le voisinage de $\zeta = 1$ et dans le cas du détachement en proue :

$$\frac{d\omega}{df} = -C\left[P'(1) + \frac{1}{2}P(1)\right] + C\frac{\sqrt{u}}{2}[3Q'(1) + 1] + uA(u) \tag{14}$$

ou $A(u)$ est une fonction continue et bornée dans le voisinage de $u = 0$.

Mais d'après ce qui précède, la ligne libre λ correspond à $\varphi = 0$. Comme la différentielle df et ρ sont des infiniments petits équivalents, la courbure $c(\rho)$ de λ au point d'abscisse curviligne ρ (comptée à partir de A) s'écrit :

$$(15)\quad c(\rho) = -C\left[P'(1) + \frac{1}{2}P(1)\right] + C\frac{\sqrt{\rho}}{2}[3Q'(1)+1] + \rho A(\rho).$$

Si donc on a : $P'(1)+\frac{1}{2}P(1) > 0$ et $3Q'(1)+1 > 0$, $|c(\rho)|$ diminue dans le voisinage de $\rho = 0$; et λ y tourne sa convexité vers le domaine image de $\eta \geqslant 0$. Ces inégalités étant remplies, si l'arc convexe $\widehat{OA}$ est prolongé au delà de A par l'arc du cercle osculateur en A à $\widehat{OA}$, tout danger de recoupement sera écarté dans le voisinage de A. Or, c'est ce qui se produit dans l'exemple traité au § 4. Avec le choix adopté pour $P(\zeta)$ et $Q(\zeta)$, il vient :

$$P'(1)+\frac{1}{2}P(1) = 0{,}515 \qquad \text{et} \qquad 3Q'(1)+1 = 1{,}186.$$

D'après cela, la solution approchée du problème de la proue circulaire vérifie la première condition de validité de Brillouin.

14. Mais il y a plus. Traçons dans le plan ζ le demi-cercle $\zeta - 1 = \rho e^{i\varphi}$, $\rho = C^{te}$ et petit, $0 \leqslant \varphi \leqslant \pi$. Le long de cette courbe $d\zeta = i\rho e^{i\varphi}d\varphi$. Il en résulte que la partie réelle de l'intégrale :

$$\int_0^{\varphi} \frac{d\omega}{df}\rho e^{i\varphi}d\varphi$$

est égale à $\tau(1+\rho e^{i\varphi})$, en égard au fait que $\tau(1+\rho) = 0$; [cf. (8)]. Remplaçons alors dans l'expression précédente $\frac{d\omega}{df}$ par son développement limité (14), il vient, en négligeant les termes d'ordre supérieur à $\rho^{\frac{3}{2}}$:

$$\tau(1+\rho e^{i\varphi}) = -C\left[P'(1)+\frac{1}{2}P(1)\right]\rho\sin\varphi + C[3Q'(1)+1]\rho^{\frac{3}{2}}\sin\frac{3\varphi}{2}.$$

On voit donc que, dans le voisinage de $\zeta = 1$, l'inégalité $\tau \leqslant 0$ ne peut être satisfaite que moyennant les deux conditions simultanées :

$$P'(1)+\frac{1}{2}P(1) \geqslant 0 ; \qquad 3Q'(1)+1 \geqslant 0$$

identiques à celles déjà trouvées à propos du non-recoupement.

BIBLIOGRAPHIE

[1] Henri VILLAT, *Thèse*, Annales de l'École Normale Supérieure, 1911.
[2] H. VILLAT, « Aperçus théoriques sur la résistance des fluides ». *Collection Scientia*, Paris, Gauthier-Villars, 1920.
[3] J.-M. RAPOPORT, *Journal Mathématique de l'Ukraine*, t. II, 1950.
[4] J. BRODETSKY, *Proc. Ed. Math. Soc.*, 1923. — Voir aussi les Actes du deuxième Congrès International de Méc. App. Zürich, 1925.
[5] J. LERAY, *Commentarii, Mathematici Helvetici*, 1936, t. 8.
[6] J. LERAY, « Sur la validité des solutions du problème de la proue ». Volume Jubilaire de Marcel Brillouin, Paris, 1935.
[7] J. KRAVTCHENKO, *Journal de Math.*, 1941.

(Parvenu aux Annales le 13 mai 1952.)