SUR LA MÉTHODE DE RÉSONANCE ET SUR UN THÉORÈME CONCERNANT LES ESPACES DE TYPE (B)

par **I. S. Gál** (Princeton).

1. — Introduction.

Dans ce qui suit je me propose d'examiner un problème concernant les espaces de Banach en utilisant une méthode très puissante de l'analyse classique, due à H. Lebesgue. Cette même méthode peut être appliquée avec succès à d'autres domaines, tels que théorie de la sommation, séries trigonométriques et potentielles, et intégrales singulières. Toutefois ces problèmes présentent des caractères similaires ; dans chacun de ces cas on cherche des conditions nécessaires pour la convergence d'une suite de fonctionnelles.

Plusieurs de ces conditions peuvent être obtenues par des voies plus ou moins difficiles, à partir d'un théorème concernant la borne uniforme d'opérations linéaires connu aussi sous les noms : théorème de résonance [1], théorème de Banach-Steinhaus [2], principe de la borne uniforme [3], ou même th. 5 p. 80 du livre de Banach [4]. La démonstration de ce théorème, présentée sous des formes différentes par plusieurs auteurs, utilise un raisonnement sur les catégories, méthode très utile mais pas assez fine.

La méthode de Lebesgue m'a permis de démontrer quelques résultats sur l'approximation des fonctions mesurables [5], résultats qu'il ne me semble pas possible d'obtenir par l'utilisation des catégories. Par l'application directe de la méthode de Lebesgue au problème de la borne uniforme des opérations définies dans un espace de Banach, j'obtiens une forme beaucoup plus générale du principe de la borne uniforme. Un autre avantage de la méthode que j'utilise ici est que l'on peut en reproduire toutes les étapes dans chaque problème particulier.

2. — Définitions et résultats.

On sait qu'un *espace vectoriel* est un ensemble d'éléments $x \in E$ où sont définis la somme de deux éléments quelconques et le produit d'un élément par un nombre réel ces opérations satisfaisant aux lois usuelle de l'arithmétique. L'espace est dit *normé* s'il est en outre muni d'une norme $||x||$ satisfaisant aux conditions suivantes : $||x|| \geqslant 0$; $||x+y|| \leqslant ||x|| + ||y||$ pour tout $x, y \in E$; $||\lambda x|| = |\lambda| . ||x||$ pour chaque λ réel et $x \in E$; $||x|| = 0$ est équivalent à $x = \theta$, où θ désigne l'élément neutre par rapport à l'addition de E. On peut définir alors la distance de deux éléments quelconques x et y comme étant $||x - y||$ et E devient alors un *espace métrique*.

L'espace étant métrisé, on peut parler de suites $\{x_i\}$ convergentes vers un élément x_0, définies par la condition $||x_i - x_0|| \to 0$ pour $i \to \infty$. Il est évident qu'une suite convergente satisfait à la condition de Cauchy, c'est-à-dire $||x_i - x_j|| \to 0$ pour $i, j \to \infty$. Par contre la validité de cette condition n'entraîne pas en général la convergence de la suite $\{x_i\}$. Si l'espace est tel que chaque suite $\{x_i\}$ satisfaisant à la condition de Cauchy est convergente l'espace est dit *complet*.

Considérons maintenant deux espaces vectoriels E et E′ normés, non nécessairement complets. Faisons correspondre à chaque élément $x \in E$ un élément quelconque, mais bien défini, de l'espace E′ qui sera noté par $u(x)$. Nous obtenons ainsi une fonction, ou suivant la terminologie actuelle, une *opération* $u(x)$ définie sur E à valeurs dans E′. Notons en passant, que dans le cas le plus important où E′ est l'espace des nombres réels la fonction est appelée une *fonctionnelle*.

On dit qu'une opération $u(x)$; $x \in E$ à valeurs dans E′ est *bornée et homogène*, s'il existe un nombre positif M tel que $||u(x)|| \leqslant M||x||$ pour chaque $x \in E$ et si de plus $||u(\lambda x)|| = |\lambda| . ||u(x)||$ pour chaque λ réel et $x \in E$. Donc on peut parler de $\sup\limits_{||x|| \leqslant 1} ||u(x)|| \leqslant M < +\infty$, qui sera appelé la *norme* de l'opération $u(x)$ et noté par $|u|$. On a alors $||u(x)|| \leqslant |u| . ||x||$ pour chaque $x \in E$ et cette inégalité ne peut pas être améliorée. Nous pouvons choisir ainsi des éléments x tels que l'on ait $||u(x)|| \geqslant |u|/2$. Comme $||u(\theta)|| = 0$, nous avons $x \neq \theta$; donc en vertu de $||u(\lambda x)|| = |\lambda| . ||u(x)||$ nous pouvons choisir les $||x|| = 1$. Définissons une classe de suites d'opérations bornées et homogènes de la manière suivante :

DÉFINITION. — *On dit qu'une suite d'opérations bornées et homo-*

gènes est asymptotiquement sous-additive si elle satisfait aux conditions suivantes : On a

$$(1) \qquad \|u_n(x+y)\| \leqslant \|u_n(x)\| + O(|u_n| \cdot \|y\|)$$

uniformément dans $x, y \in E$; *et*

$$(2) \qquad \inf_{\|y\| \leqslant 1} [\|u_n(x+y)\| + \|u_n(x)\| - \|u_n(y)\|] \geqslant o(|u_n|),$$

pour chaque élément $x \in E$, *mais non nécessairement uniformément dans* x.

Maintenant nous pouvons énoncer notre résultat concernant la borne uniforme des suites d'opérations comme suit :

THÉORÈME 1. — *Soit donnée une suite* $\{u_n(x)\}$ $(n = 1, 2, \ldots)$ *asymptotiquement sous-additive d'opérations bornées et homogènes, définies dans un espace vectoriel, normé et complet* E. *Si l'on a*

$$(3) \qquad \overline{\lim_{n \to \infty}} \|u_n(x)\| \leqslant H(x) < +\infty$$

pour chaque $x \in E$, *alors la suite des normes est bornée, c'est-à-dire* $|u_n| \leqslant \mu < +\infty$ *pour* $n = 1, 2, \ldots$.

Et on le généralise tout de suite :

THÉORÈME 2. — *Soit donnée une suite* $\{u_n(x)\}$ $(n = 1, 2, \ldots)$ *d'opérations bornées et homogènes, définies dans un espace vectoriel, normé par la norme* $\|x\|$. *Supposons qu'il existe un sous-espace* E *complet, normé par quelque norme* $\|x\|_E$ *et tel que la suite* $\{u_n(x)\}$ *est asymptotiquement sous-additive dans* E *et, en plus* $|u_n| = O(|u_n|_E)$. *Si l'on a* (3) *pour chaque* $x \in E$, *alors* $|u_n| \leqslant \mu < +\infty$ *pour* $n = 1, 2, \ldots$.

3. — La méthode de Lebesgue.

Considérons la suite $\{x_n\}$ satsfaisant à

$$(4) \qquad \|u_n(x_n)\| \geqslant |u_n|/2 \quad \text{et} \quad \|x_n\| = 1 \quad (n = 1, 2, \ldots).$$

On dit d'après G. Pólya [6] que les éléments $x_1, x_2, \ldots$ sont en *résonance* avec les opérations $u_1(x), u_2(x), \ldots$, respectivement. En effet nous obtenons immédiatement

$$|u_n|/2 \leqslant \|u_n(x_n)\| \leqslant |u_n|,$$

et cette inégalité montre que la norme de $u_n(x_n)$ a exactement le même ordre de grandeur que la norme de l'opération $u_n(x)$.

Pour chercher la démonstration du théorème 1 ci-dessus nous allons appliquer la méthode de Lebesgue : Supposons que

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}|u_n| = +\infty.$$

Notre but est d'obtenir un élément $x \in \mathrm{E}$ tel que (3) ne soit pas remplie. Partons des éléments x_1, x_2, ... en résonance avec $u_1(x)$, $u_2(x)$, ... Il y a parmi eux des éléments $x_{n_k}(k = 1, 2, \ldots)$ pour lesquels on a $\|u_{n_k}(x_{n_k})\| \to +\infty$; $k \to \infty$. Essayons de déterminer x, tel que (3) ne soit pas vrai, par une série infinie

$$x = \sum_{k=1}^{\infty} a_k x_{n_k} \quad (a_k \geqslant 0),$$

dont on assure la convergence par la condition $\Sigma a_k < \infty$.

Lorsque $\|u_{n_k}(x_{n_k})\| \to \infty$, nous essayons de choisir les coefficients tels que $\|u_{n_i}(x)\|$ ait à peu près le même ordre de grandeur que celui de $\|u_{n_i}(x_{n_i})\|$. Il n'est pas difficile de voir que la différence entre eux peut être majorée par

$$\left\| u_{n_i}\left(\sum_1^{i-1} a_k x_{n_k}\right)\right\| + |u_{n_i}|\varepsilon_i + \mathrm{O}(|u_{n_i}|)\sum_{i+1}^{\infty} a_k,$$

où le nombre $\varepsilon_i > 0$ ne dépendant que des coefficients $a_1, a_2, \ldots, a_{i-1}$ et de n_i est aussi petit qu'on veut dès n_i est assez grand ;

$$n_i \geqslant n(a_1, \ldots, a_{i-1} ; x_{n_1}, \ldots, x_{n_{i-1}}).$$

Observons que le premier terme est indépendant du choix de a_k ; $k \geqslant i$ et x_{n_k} ; $k \geqslant i$, et de la même façon le dernier terme ne dépend pas des éléments x_{n_k} ; $k \geqslant (i+1)$. Cela donne l'idée de construire x par induction par rapport à $i = 1, 2, \ldots$. Les détails précis de la construction sont comme suit :

Démonstration. — Soit donnée une suite $\{x_n\}$ satisfaisant aux conditions (4). Supposons l'hypothèse du théorème satisfaite et la conclusion en défaut :

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}|u_n| = +\infty. \tag{5}$$

On peut choisir, alors, un élément x_{n_1} tel que l'on ait $\|u_{n_1}(x_{n_1})\| \geqslant 2$. Supposons maintenant que les éléments $x_{n_1}, x_{n_2}, \ldots, x_{n_{i-1}}$ $(i \geqslant 2)$ sont déjà choisis d'une manière convenable.

Considérons d'abord

$$y_i = x_{n_1} + \frac{x_{n_2}}{2\,|u_{n_1}|} + \cdots + \frac{x_{n_{i-1}}}{2^{i-2}\,|u_{n_{i-2}}|}.$$

Comme l'hypothèse (3) est supposée valable on a

(6) $$\|u_n(y_i)\| \leqslant \mathrm{H}(y_i) \quad \text{pour tout } n = 1, 2, \ldots$$

$|u_{n_{i-1}}|$ et y_i étant fixés on déduit de (2)

(7) $$\|u_{n_i}(y_i+\zeta)\| + \|u_{n_i}(y_i)\| - \|u_{n_i}(\zeta)\| \geqslant -|u_{n_i}|/2^{i+1}|u_{n_{i-1}}|$$

pourvu que n_i soit assez grand ; $n_i \geqslant n(|u_{n_{i-1}}|, y_i)$. Choisissons maintenant en vertu de (5) la valeur précise de n_i tel que l'on ait aussi

(8) $$|u_{n_i}| \geqslant 2^{i+1}|u_{n_{i-1}}|\,[\mathrm{H}(y_i)+i].$$

Ainsi nous venons d'obtenir une suite $\{x_{n_i}\}(i=1, 2, \ldots)$ satisfaisant aux conditions (4), (6), (7) et (8).

Enfin, posons

$$x = x_{n_1} + \frac{x_{n_2}}{2\,|u_{n_1}|} + \cdots + \frac{x_{n_i}}{2^{i-1}\,|u_{n_{i-1}}|} + \cdots$$

et

$$z_i = \frac{x_{n_{i+1}}}{2^i\,|u_{n_i}|} + \frac{x_{n_{i+2}}}{2^{i+1}\,|u_{n_{i+1}}|} + \cdots$$

La convergence de ces séries est évidente parce que $\|x_{n_i}\| = 1$ et $|u_{n_i}| \geqslant 1 (i = 1, 2, \ldots)$, donc la condition de Cauchy est satisfaite. En particulier nous déduisons de là :

(9) $$\|z_i\| \leqslant 1/|u_{n_i}| \qquad (i = 1, 2, \ldots).$$

Montrons maintenant que $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\,\|u_n(x)\| = +\infty$, ce qui sera contraire à l'hypothèse du théorème. Tout d'abord, on tire immédiatement de la définition de y_i, z_i et x que $x = y_i + x_{n_i}/2^{i-1}|u_{n_{i-1}}| + z_i$.

D'après (1), (7) et (9) on obtient alors

$$\begin{aligned}\|u_{n_i}(x)\| &= \|u_{n_i}(y_i + x_{n_i}/2^{i-1}|u_{n_{i-1}}| + z_i)\| \\ &\geqslant \|u_{n_i}(y_i + x_{n_i}/2^{i-1}|u_{n_{i-1}}|)\| + \mathrm{O}(1)\,|u_{n_i}|\,.\,\|-z_i\| \\ &\geqslant \|u_{n_i}(x_{n_i}/2^{i-1}|u_{n_{i-1}}|)\| - \|u_{n_i}(y_i)\| - |u_{n_i}|/2^{i+1}|u_{n_{i-1}}| + \mathrm{O}(1).\end{aligned}$$

Enfin, utilisant (4), (6) et (8) on a

$$\|u_{n_i}(x)\| \geqslant |u_{n_i}|/2^{i+1}|u_{n_{i-1}}| - \mathrm{H}(y_i) + \mathrm{O}(1) \geqslant i + \mathrm{O}(1)$$

pour tout $i = 1, 2, \ldots$. Le théorème 1 est donc démontré.

4. — Remarques et exemples.

Considérons maintenant quelques exemples de suites d'opérations asymptotiquement sous-additives. Le cas le plus simple est celui des opérations linéaires, c'est-à-dire telles que

$$u(x+y) = u(x) + u(y) \qquad \text{et} \qquad \|u(x)\| \leqslant M\|x\|.$$

Il est facile de voir que ces opérations sont *continues partout* et remplissent la condition $u(\lambda x) = \lambda u(x)$ pour tout λ réel.

Le cas suivant est celui des opérations homogènes, bornées et sous-additives. Elles satisfont aux conditions :

$$(10) \qquad \|u(x)\| \leqslant M\|x\|; \qquad \|u(\lambda x)\| = |\lambda| . \|x\|$$

et

$$\|u(x+y)\| \leqslant \|u(x)\| + \|u(y)\|.$$

On peut aisément montrer que *la norme* $\|u(x)\|$ est une fonctionnelle homogène, bornée et *continue partout. L'opération* elle-même est continue au point $x = \theta$, mais elle n'est *pas nécessairement continue* partout. Considérons, par exemple, l'espace des fonctions continues dans $0 \leqslant t \leqslant 1$, normé par $\|x\| = \max|x(t)|$. Soit τ $(0 \leqslant \tau \leqslant 1)$ la plus petite valeur de t pour laquelle $|x(\tau)| = \max|x(t)|$, on voit alors que l'opération

$$u(x) = e^{2\pi i \tau} \int_0^1 |x(t)|\, dt$$

satisfait à (10), mais n'est pas continue partout.

Voici finalement un exemple pour le cas général : D'après L. Kantorovitch [7] la *moyenne métrique* d'une fonction mesurable $x(t) (0 \leqslant t \leqslant 1)$ par rapport à l'intervalle (a, b) est le nombre réel

$$h = m(a, b) m[x(t)]$$

pour lequel

$$\text{mes}\, E[x(t) \geqslant h] \geqslant (b-a)/2$$

mais

$$\text{mes}\, E[x(t) \geqslant h + \varepsilon] < (b-a)/2$$

pour tout $\varepsilon > 0$.

Considérons l'espace des fonctions continues dans $[0,1]$, normé par $\max|x(t)|$. Posons

$$u_n(x) = a_n \sum_{k=1}^{n} m\left(\frac{2k-1}{2n}, \frac{k}{n}\right) m[x(t)] \qquad (n = 1, 2, \ldots),$$

où $a_n > 0$ désigne un nombre réel quelconque. On peut facilement montrer que l'opération est bornée, homogène et $|u_n| = a_n . n$. Il est évident aussi que ces opérations satisfont à la condition (1) et (2).

Considérons maintenant les mêmes opérations dans l'espace $L(0,1)$. On peut facilement montrer que $|u_n| = 4a_n . n$: En effet, on a en vertu de la définition

$$\left| m\left(\frac{2k-1}{2n}, \frac{k}{n}\right) m[x(t)] \right| \leqslant m\left(\frac{2k-1}{2n}, \frac{k}{n}\right) m[|x(t)|],$$

et

$$m\left(\frac{2k-1}{2n}, \frac{k}{n}\right) m[|x(t)|] \leqslant 4n \int_{\frac{2k-1}{2n}}^{\frac{n}{k}} |x(t)|\,dt.$$

Cela donne

$$\|u_n(x)\| \leqslant a_n \sum_{k=1}^{n} \left| m\left(\frac{2k-1}{2n}, \frac{k}{n}\right) m[x(t)] \right|$$

$$\leqslant 4a_n . n \sum_{k=1}^{n} \int_{\frac{2k-n}{2n}}^{\frac{k}{n}} |x(t)|\,dt \leqslant 4a_n . n,$$

pour n'importe quel élément $x(t)$ satisfaisant à $\|x\| = \int_0^1 |x(t)|\,dt \leqslant 1$. D'autre part on obtient exactement $\|u_n(x)\| = 4a_n . n$ pour la fonction

$$x(t) = \begin{cases} 4, & \text{si } (2k-1)/2n \leqslant t \leqslant (4k-1)/4n \\ 0 & \text{pour les autres valeurs de } t;\ 0 \leqslant t \leqslant 1. \end{cases}$$

Les fonctionnelles $\|u_n(x)\|$ $\big(x \in L(0,1)\big)$ sont évidemment continues pour $\theta = \theta(t) = 0$, mais elles sont *discontinues* pour tout élément différent de zéro.

BIBLIOGRAPHIE

[1] St. Kaczmarz et H. Steinhaus, Theorie der Orthogonalreihen, p. 19-23 (Warszawa, 1935).

[2] A. Zygmund, Trigonometrical series, p. 97-98 (Warszawa, 1935); J. Favard, *Annali di Matematica*, sér. 4, **29**, 259-291 (1949).

[3] E. Hille, Functional analysis and semi groups, p. 25-26 (*Amer. Math. Soc.*, 1948).
[4] St. Banach, Théorie des opérations linéaires, p. 80 (Warszawa, 1932).
[5] I. S. Gál, sur la convergence d'interpolations linéaires. I. Fonctions bornées, *C. r.*, **230**, p. 1374-1376 (1950).
[6] G. Pólya, Über die Konvergenz von Quadraturverfahren, *Math. Z.*, **37**, 264-286 (1933).
[7] L. Kantorovitch, Math. Sbornik *(Rec. Math. Moscou)*, **41**, p. 503-506 (1934).

Institute for Advanced Study, Princeton N. J.

(Parvenu aux Annales le 5 novembre 1951).